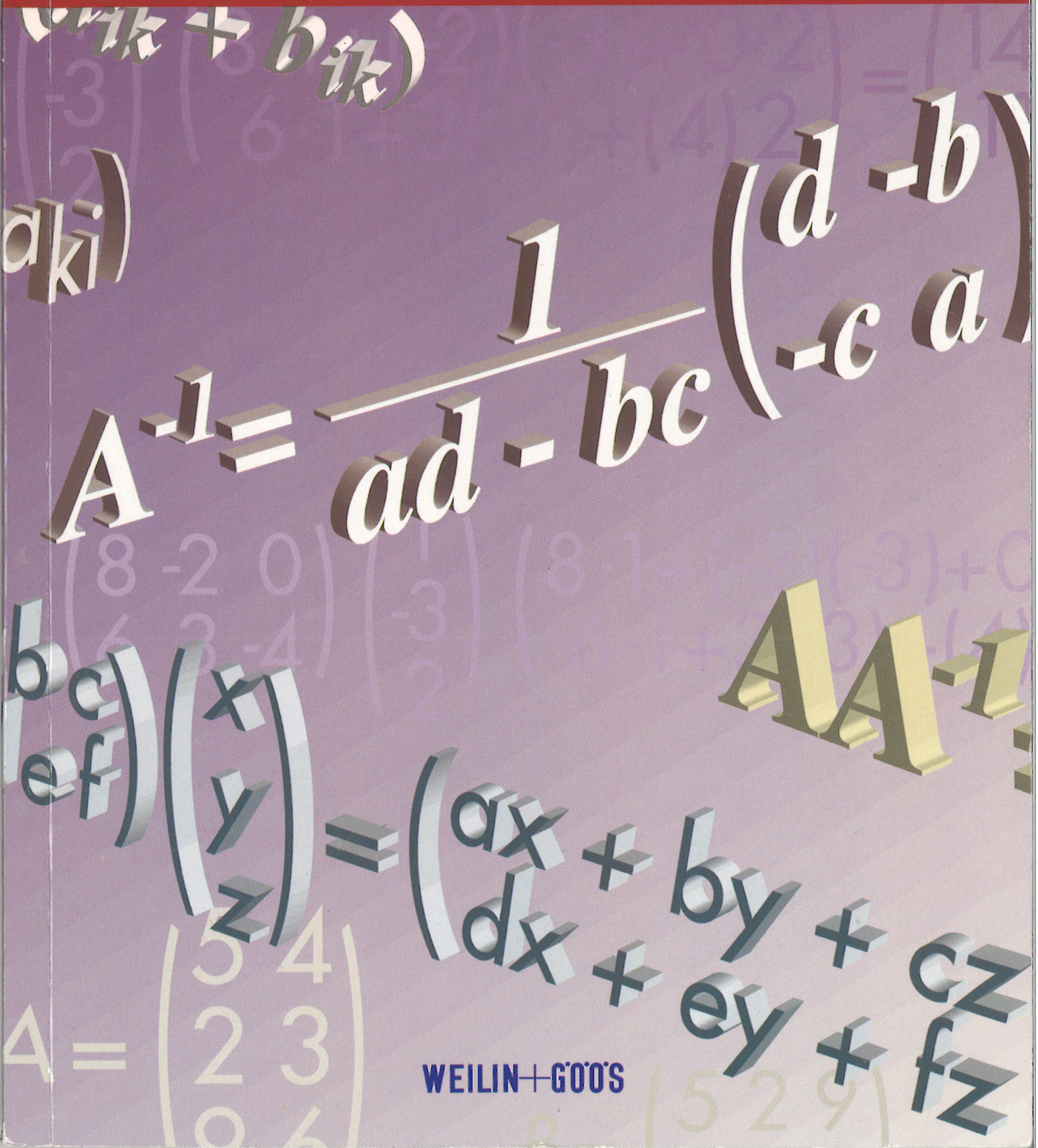
Merikoski • Väänänen • Laurinolli • Sankilampi

MATEMATIIKAN TAITO 15

Lineaarialgebra



WEILIN+GÖÖS

Merikoski • Väänänen • Laurinolli • Sankilampi

MATEMATIIKAN TAITO 15

Lineaarialgebra

Lukion pitkä matematiikka
Syventävä kurssi

WSOY-yhtymä
WEILIN+GÖÖS

Yhteystiedot

WSOY/OPPIMATERIAALIT
Tiedustelut, tilaukset
PL 222, 00121 Helsinki
Faksi (09) 616 8543
Palvelulinja puh. 0203-91000
WSOY/TILAUSKONTTORI, PORVOO

Tilaukset
Puh. (019) 548 01
Faksi (019) 548 0339

INTERNET
www.wsoy.fi/koulu

1. painos

Ulkoasu: Tuovi Laine
Taitto: Tampereen tekstifilmi/Eija Huuhtanen
Piirrokset: Eila Sinivuori
Kansi: Kaaripiste/Markku Laitinen

© Jorma Merikoski, Keijo Väänänen, Teuvo Laurinolli, Timo Sankilampi ja WSOY-yhtymä WEILIN+GÖÖS 1998

Tämän teoksen kopioiminen on tekijänoikeuslain (404/61) ja tekijänoikeusasetuksen (574/95) mukaisesti kielletty lukuun ottamatta Suomen valtion ja Kopiosto ry:n tekemässä sopimuksessa tarkemmin määriteltyä osittaista kopiointia opetustarkoituksiin.

ISBN 951-35-6339-1
WSOY – Kirjapainoyksikkö
Porvoo 1998

Sisällys

Oppilaalle ja opettajalle 4

1 MATRIISIT 5

1.1 Peruskäsitteitä 6
1.2 Matriisien kertolasku 16
1.3 Matriisin potenssi 26
1.4 Käänteismatriisi 38

2 LINEAARISET YHTÄLÖRYHMÄT 47

2.1 Perusasioita 48
2.2 Gaussin eliminointimenetelmä 57
2.3 Gaussin-Jordanin eliminointimenetelmä 69
2.4 Leontiefin panos-tuotos-mallit 80

3 VEKTORIAVARUUDET JA LINEAARIKUVAUKSET 87

3.1 Vektoriavaruus ja aliavaruus 89
3.2 Kanta ja dimensio 101
3.3 Normi ja sisätulo 113
3.4 Tason lineaarikuvaukset 124

4 OMINAISARVOT JA OMINAISVEKTORIT 135

4.1 Ominaisarvoprobleema 136
4.2 Dynaamisia systeemejä 147

TULOKSIA JA OHJEITA 155

SUOMALAIS-ENGLANTILAINEN SANASTO 162

ASIA- JA NIMIHAKEMISTO 163

KIRJALLISUUSLUETTELO 164

Liite: GRAAFISEN LASKIMEN KÄYTTÖ 165

Oppilaalle ja opettajalle

Lineaarialgebraa voidaan nykyisin soveltaa monipuolisesti, sillä suuriakin matriiseja on helppo käsitellä tietokoneella. Siksi lineaarialgebran opetus on vakiintunut yliopistoissa ja mielenkiintoa siihen on lukioissakin.

Matematiikan Taito 15: Lineaarialgebra on tarkoitettu ensisijaisesti lukion pitkän matematiikan syventävälle kurssille, mutta se sopii myös muihin keskiasteen oppilaitoksiin ja ammattikorkeakouluihin. Matriisien tärkeä merkitys ei-luonnontieteellisillä aloilla antaa ehkä aiheen käyttää tätä kirjaa myös lukion lyhyen matematiikan vastaavalla kurssilla, jolloin sisältöä on sopivasti valikoitava ja kevennettävä.

Kirjan suunnittelussa huono vaihtoehto olisi ollut laatia lyhennetty yliopistokurssi, jossa käsitellään vähän kaikkea. Parempi oli karsia sisältöä ja kiinnittää erityistä huomiota motivointiin ja sovelluksiin. Jätimme pois determinantit, suorien ja tasojen systemaattisen tutkimisen sekä vektoritulon. Ominaisarvoprobleemassa rajoituimme 2×2-matriiseihin, mutta se ei estä käsittelemästä suurempiakin matriiseja laskimella tai tietokoneella.

Lineaarialgebran opiskelussa on välttämätöntä osata laskea matriiseilla koneellisesti. Kirjassa on laskimen käytöstä vain lyhyt liite. Sitä voidaan tarvittaessa täydentää laskimen tai tietokoneohjelman käyttöohjeilla. Pienten matriisien laskutoimituksia on harjoiteltava myös käsin. Taito kertoa kaksi matriisia ilman laskulaitteita on tärkeydeltään verrattavissa taitoon kertoa kaksi lukua tällä tavalla.

Lineaarialgebran opetus, tutkimus ja soveltaminen ovat voimakkaassa kehitysvaiheessa. Toivomme, että *Matematiikan Taito 15* on omalta osaltaan hyödyksi tämän alan opetuksen kehitystyössä.

Tekijät

1 MATRIISIT

1.1 Peruskäsitteitä

Alkupalat
1 R^n ja n-ulotteiset vektorit
2 Matriisi
3 Vaaka- ja pystyvektorit
4 Matriisin transponointi
5 Matriisien yhteen- ja vähennyslasku
6 Matriisin kertominen skalaarilla
✎ Harjoitustehtäviä
Tutkimustehtävä: Symmetriset ja vinosymmetriset matriisit

1.2 Matriisien kertolasku

Alkupalat
1 Matriisin ja vektorin kertolasku
2 Kahden matriisin kertolasku
3 Esimerkkejä
✎ Harjoitustehtäviä
Tutkimustehtävä: Matriisitulon laskulakeja
Tutkimustehtävä: 1×1-matriisit ja skalaaritulo
Tutkimustehtävä: Matriisin jälki

1.3 Matriisin potenssi

Alkupalat
1 Potenssin määritelmä ja laskusääntöjä
2 Väestön liikkuvuuden malli
3 Markovin ketjut
4 Markovin ketjun stabiilius
5 Turnausmatriisi
✎ Harjoitustehtäviä
Tutkimustehtävä: Digraafi ja sen matriisi
Tutkimustehtävä: Sanageneraattori

1.4 Käänteismatriisi

Alkupalat
1 Käänteismatriisin määritelmä
2 2×2-matriisin kääntäminen
3 Käänteismatriisin ominaisuuksia
4 Salakirjoitus
5 Geometrinen matriisisumma
✎ Harjoitustehtäviä
Tutkimustehtävä: Ortogonaaliset matriisit
Tutkimustehtävä: Salakirjoitus, jatkoa

1.1 Peruskäsitteitä

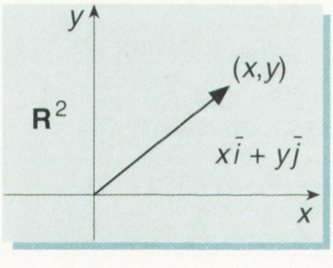
Alkupalat

1. Kuinka monta (a) vaakariviä, (b) pystyriviä, (c) lukua on sellaisessa taulukossa, josta näkyy jokaisen kuukauden keskilämpötila kymmenen viime vuoden ajalta?

2. Kymmenen jalkapallojoukkuetta pelaa keskenään yksinkertaisen sarjan. Siis jokainen joukkue pelaa jokaista muuta vastaan kerran. Millä tavalla tulokset kannattaa taulukoida?

1 $\mathbf{R}^n$ ja n-ulotteiset vektorit

Merkitsemme $\mathbf{R}^2$:lla kaikkien järjestettyjen reaalilukuparien (x,y) joukkoa. Tason pisteiden joukko, joukko $\mathbf{R}^2$ ja tason vektorien joukko vastaavat täysin toisiaan, sillä voimme asettaa tason pistettä vastaamaan sen koordinaattiparin (x,y) sekä tämän pisteen paikkavektorin $x\bar{i} + y\bar{j}$. Siksi voimme samastaa {tason pisteet} = $\mathbf{R}^2$ = {tason vektorit} ja kirjoittaa $(x, y) = x\bar{i} + y\bar{j}$.



Vastaavasti merkitsemme $\mathbf{R}^3$:lla kaikkien järjestettyjen reaalilukukolmikkojen (x,y,z) joukkoa, samastamme {3-ulotteisen avaruuden pisteet} = $\mathbf{R}^3$ = {3-ulotteisen avaruuden vektorit} ja kirjoitamme $(x, y, z) = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$. Yleisesti voimme puhua n-ulotteisesta avaruudesta $\mathbf{R}^n$.

2 Matriisi

Kuvitelkaamme, että erään liikuntaryhmän pojista 5 on juoksijoita, 2 uimareita ja 9 palloilijoita, kun taas tämän ryhmän tytöistä 4 on juoksijoita, 3 uimareita ja 6 palloilijoita. Voimme tiivistää nämä tiedot seuraavaan taulukkoon.

Taulukko 1

	Pojat	Tytöt
Juoksijat	5	4
Uimarit	2	3
Palloilijat	9	6

Voimme taulukoida nämä tiedot toisellakin tavalla.

Taulukko 2

	Juoksijat	Uimarit	Palloilijat
Pojat	5	2	9
Tytöt	4	3	6

Näissä taulukoissa on sama informaatio.

Jättämällä taulukosta 1 otsikot pois saamme *matriisin*, jossa on tämän taulukon numeerinen informaatio. Ympäröimme matriisin sulkeilla. Merkitsemme tätä matriisia A:lla. Siis

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

Matriisissa A on kolme *vaakariviä* ja kaksi *pystyriviä*. Siksi sanomme, että A on 3×2*-matriisi* (lue: "kolme kertaa kaksi matriisi"), että tämän matriisin *kertaluku* on 3×2 ja että tämän matriisin *dimensiot* ovat 3 ja 2. Matriisilla A on kuusi *alkiota*, nimittäin luvut 5, 4, 2, 3, 9 ja 6. Merkitsemme a_{ik}:lla (lue: "*a i k*") matriisin A sitä alkiota, joka on *i*:nnellä vaakarivillä ja *k*:nnella pystyrivillä. Siis

$$\begin{aligned} a_{11} &= 5, & a_{12} &= 4, \\ a_{21} &= 2, & a_{22} &= 3, \\ a_{31} &= 9, & a_{32} &= 6. \end{aligned}$$

Yleisesti merkitsemme $A = (a_{ik})$ tarkoittamaan, että A on sellainen matriisi, jonka i. vaakarivin ja k. pystyrivin alkio $= a_{ik}$.

Matriisit A ja B ovat *samat*, jos niillä on samat alkiot. Tällöin merkitsemme $A = B$. Samoilla matriiseilla on oltava sama kertaluku.

Esimerkki. Matriisit

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ja $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$,

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ja $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

eivät ole samat.

3 Vaaka- ja pystyvektorit

Matriisin $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$ vaakariveistä saamme 1×2-matriisit

$$X_1 = (5\ 4),\ X_2 = (2\ 3),\quad X_3 = (9\ 6),$$

joita kutsumme matriisin A *vaakavektoreiksi*. Vastaavasti saamme pystyriveistä tämän matriisin *pystyvektorit*

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix},\ Y_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix},$$

jotka ovat 3×1-matriiseja. Voimme *osittaa* matriisin A vaaka- tai pystyvektorien avulla:

$$A = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = (Y_1\ Y_2).$$

Neliömatriisin vaaka- ja pystyrivien lukumäärät ovat samat. Siis neliömatriisi on $n \times n$-matriisi.

Esimerkki. Yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 4x - 3y + 2z = 2 \\ -x + y - z = 3 \end{cases}$$

tuntemattomien kertoimet muodostavat neliömatriisin

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Merkitsemme $\mathbf{R}^{m\times n}$:llä kaikkien (reaalialkioisten) $m\times n$-matriisien joukkoa. Tuntuisi luontevalta pitää joukon $\mathbf{R}^n$ alkioita vaakavektoreina. Kuitenkin osoittautuu paremmaksi pitää niitä pystyvektoreina, joten sovimme, että $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{n\times 1}$. Siis

$$\text{vektori } (1, 2, 3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Vastaavaa vaakavektoria merkitsemme ilman pilkkuja (1 2 3). Erityisesti $\mathbf{R}^{1\times 1} = \mathbf{R}$, joten esimerkiksi $(5) = 5$. Ks. kuitenkin tutkimustehtävä "1× 1-matriisit ja skalaarit" s. 25.

4 Matriisin transponointi

Esimerkki 1. Palaamme kohdan 2 taulukkoihin. Taulukkoa 1 vastaa matriisi

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$$

ja taulukkoa 2 matriisi

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 9 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Vaikka näissä taulukoissa on sama informaatio, niin matriisit A ja B eivät ole samoja. Sanomme, että B on A:n *transpoosi*, ja merkitsemme $B = A^T$ (lue: "A transpoosi" tai "A t").

Yleisesti matriisin A transpoosin vaakariveinä ovat A:n pystyrivit ja siis pystyriveinä A:n vaakarivit. Jos matriisin A kertaluku on $m \times n$, niin transpoosin A^T kertaluku on $n \times m$. Matriisin *transponoinnilla* tarkoitamme transpoosin muodostamista.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}, \qquad (a_{ik})^T = (a_{ki})$$

Esimerkki 1, jatkoa. Tämän esimerkin matriiseille on $B = A^T$ eli

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 9 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}^T.$$

Myös $A = B^T$.

Esimerkki 2. Osoita, että $(A^T)^T = A$ kaikilla 2×3-matriiseilla A.

Olkoon $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$. Tällöin $A^T = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$ ja edelleen

$$(A^T)^T = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = A.$$

Vastaavasti voimme osoittaa, että tämä ominaisuus on kaikilla $m \times n$-matriiseilla.

5 Matriisien yhteen- ja vähennyslasku

Jatkamme liikuntaesimerkin käsittelyä. Olkoon eräässä toisessa liikuntaryhmässä eri lajien harrastajia sukupuolen mukaan seuraavasti.

Taulukko 3

	Pojat	Tytöt
Juoksijat	4	2
Uimarit	1	1
Palloilijat	3	6

Vastaava matriisi on

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Yhdistämällä nämä kaksi liikuntaryhmää saamme seuraavan taulukon.

Taulukko 4

	Pojat	Tytöt
Juoksijat	9	6
Uimarit	3	4
Palloilijat	12	12

Vastaava matriisi on

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 3 & 4 \\ 12 & 12 \end{pmatrix}.$$

On luontevaa määritellä C matriisien A ja B *summaksi* ja merkitä C = A + B. *Matriisien summa saadaan suorittamalla yhteenlasku alkioittain. Tällöin yhteenlaskettavilla matriiseilla on oltava sama kertaluku, joka on myös summamatriisin kertaluku.*

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+x & b+y & c+z \\ d+u & e+v & f+w \end{pmatrix}$$

$$(a_{ik}) + (b_{ik}) = (a_{ik} + b_{ik})$$

Vastaavasti määrittelemme matriisien A ja B *erotuksen* suorittamalla vähennyslaskun alkioittain.

Matriisien yhteenlasku noudattaa liitäntä- ja vaihdantalakia (teht. 11).

Esimerkki 1.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+(-3) & 1+5 \\ 0+7 & (-2)+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ei ole määritelty.

Esimerkki 2.

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -9 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-(-2) & 1-5 \\ -9-6 & 4-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -15 & -4 \end{pmatrix}.$$

6 Matriisin kertominen skalaarilla

Palaamme jälleen alkuperäiseen esimerkkiimme. Kuvitelkaamme, että ensimmäistä liikuntaryhmää halutaan laajentaa niin, että kummankin sukupuolen kaikkien lajien harrastajien lukumäärät kolminkertaistuvat. Näin saamme taulukon

Taulukko 5

	Pojat	Tytöt
Juoksijat	15	12
Uimarit	6	9
Palloilijat	27	18

On luontevaa määritellä vastaava matriisi

$$D = \begin{pmatrix} 15 & 12 \\ 6 & 9 \\ 27 & 18 \end{pmatrix}$$

skalaarin (eli reaaliluvun) 3 ja matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$$

tuloksi ja merkitä $D = 3A$. *Skalaarin* c *ja matriisin* A *tulo* cA *saadaan kertomalla matriisi alkioittain tällä skalaarilla. Tulomatriisin kertaluku on sama kuin alkuperäisen matriisin kertaluku.*

$$c\begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx & cy & cz \\ cu & cv & cw \end{pmatrix}, \quad c(a_{ik}) = (ca_{ik})$$

Matriisin kertominen skalaarilla noudattaa osittelulakeja (teht. 14).

Esimerkki.
$$3\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 7 & 3(-6) \\ 3\cdot 4 & 3\cdot 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 3 \\ 2\cdot 5 & 2(-6) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 21 & -18 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 10 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21-2 & -18-6 \\ 12-10 & 0-(-12) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 19 & -24 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}.$$

Harjoitustehtäviä

1. Ilmoita matriisin $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 & 0 \\ 2 & 6 & 4 & 9 \\ 1 & 1 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

(a) kertaluku, **(b)** dimensiot, **(c)** vaakavektorit, **(d)** pystyvektorit, **(e)** alkio a_{22}, **(f)** alkio a_{31}.

2. Olkoon $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$.

Määritä **(a)** $A + B$ ja $B + A$, **(b)** $A + (B + C)$ ja $(A + B) + C$. Mitä huomaat?

3. Olkoon $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix}$.

Määritä **(a)** $A + B$, **(b)** $A - B$, **(c)** $2A + 3B$.

4. Olkoot A ja B kuten edellä. Määritä **(a)** A^T, **(b)** B^T, **(c)** $A^T + B^T$, **(d)** $(A + B)^T$. Mitä huomaat?

5. Erään vaatekaupan inventaarion mukaan tiettyä T-paitaa oli eri värejä ja kokoja seuraavasti.

	Pieni	Keskikoko	Suuri
Punainen	17	23	5
Sininen	8	13	19
Keltainen	1	10	21

Olkoon A tätä taulukkoa vastaava matriisi. Mikä on matriisin **(a)** A^T, **(b)** $3A$ merkitys? **(c)** Mikä on matriisin $A + B$ merkitys, kun B on vaatekaupan toisen liikkeen vastaavaan taulukkoon liittyvä matriisi?

6. Olkoon $M_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Laske **(a)** $M_1 + M_2$, **(b)** $M_2 - M_3$, **(c)** $2M_1 - 3M_3$, **(d)** $M_1^T - M_2^T + M_3^T$.

7. Ratkaise x yhtälöstä

(a) $\begin{pmatrix} 3x & 4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ -5 & 18 \end{pmatrix}$.

8. Olkoon $M_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} x \\ -2 \\ -4 \\ y \end{pmatrix}$, $M_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ v \\ 3 \end{pmatrix}$.

Määritä x, y, u ja v, kun **(a)** $M_3 = 3M_1$, **(b)** $M_3 + 2M_4 = M_1$, **(c)** $2M_3 - M_2 = M_4$.

9. Olkoon $A = (A_1\ A_2\ A_3)$, missä $A_1, A_2, A_3 \in \mathbf{R}^4$ ovat matriisin A pystyvektorit. Mitkä ovat matriisin A^T **(a)** dimensiot, **(b)** vaakavektorit?

10. Todista, että (i) $(A + B)^T = A^T + B^T$, (ii) $(cA)^T = cA^T$ kaikilla reaaliluvuilla c ja **(a)** 2×2-, **(b)** $m\times n$-matriiseilla A ja B.

11. Todista matriisien yhteenlaskun (i) vaihdantalaki $A + B = B + A$, (ii) liitäntälaki $A + (B + C) = (A + B) + C$ kaikille **(a)** 2×2-, **(b)** $m\times n$-matriiseille A, B ja C. Liitäntälain perusteella sulut voidaan jättää pois ja kirjoittaa $A + B + C$.

12. *Nollamatriisin* kaikki alkiot ovat = 0. Nollamatriisille, jonka kertaluku on $m \times n$, käytämme merkintää $O_{m\times n}$. Ellei dimensioita tarvitse korostaa, käytämme lyhempää merkintää O. Osoita, että nollamatriisi on matriisien yhteenlaskun *neutraalialkio* eli $A + O = A$ kaikilla $m\times n$-matriiseilla A.

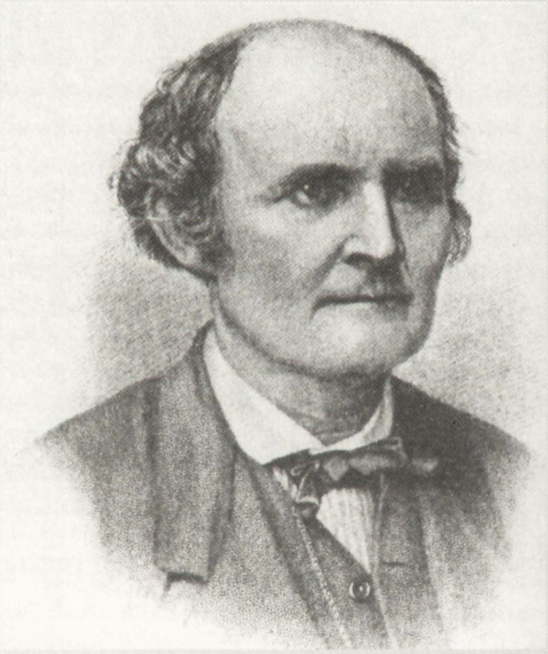
13. Matriisin A *vastamatriisi* $-A$ määritellään yhtälöllä $-A = (-1)A$. Mitä ominaisuuksia tällä vastamatriisilla on?

14. Todista matriisin ja skalaarin kertolaskun osittelulait (i) $(c + d)A = cA + dA$, (ii) $c(A + B) = cA + cB$ kaikille reaaliluvuille c ja d ja **(a)** 2×2-, **(b)** $m\times n$-matriiseille A ja B.

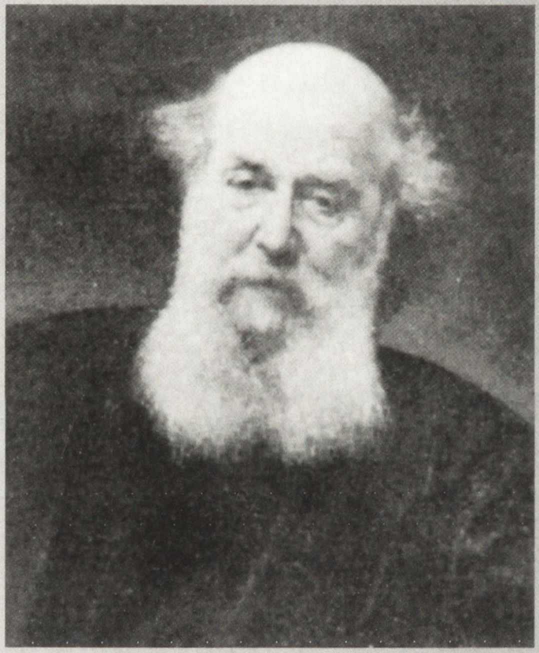
Tutkimustehtävä: *Symmetriset ja vinosymmetriset matriisit*

Neliömatriisi A on *symmetrinen*, jos $A^T = A$, ja *vinosymmetrinen*, jos $A^T = -A$. **(a)** Havainnollista näitä määritelmiä esimerkeillä. **(b)** Osoita, että symmetristen (ja vastaavasti vinosymmetristen) matriisien summa on (vino)symmetrinen. **(c)** Osoita, että jokainen neliömatriisi voidaan esittää symmetrisen ja vinosymmetrisen matriisin summana. Ohje c-kohtaan: Olkoon A mielivaltainen neliömatriisi. Merkitse $A = B + C$, missä B on symmetrinen ja C vinosymmetrinen. Transponoi tämä yhtälö puolittain ja ratkaise näin saadusta (matriisi)yhtälöparista B ja C.

Matriisilaskennan perustajia



Arthur Cayley 1821–1895



James Joseph Sylvester 1814–1897

1.2 Matriisien kertolasku

Alkupalat

1. Laske vektorien (1, 2, 3) = $\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$ ja (–5, –1, 4) = $-5\bar{i} - \bar{j} + 4\bar{k}$ skalaaritulo.

2. Miten on syytä määritellä vektorien (1, 2, 3, 4) ja (–5, –1, 4, –1) skalaaritulo?

1 Matriisin ja vektorin kertolasku

Palaamme edellisen luvun taulukkoon 1, jota vastaa matriisi

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

Kuvitelkaamme, että tämä ryhmä sai urheiluvaatteita niin, että jokaisen pojan maksettavaksi tuli 20 mk ja tytön 24 mk. Juoksijoiden oli tällöin maksettava kaikkiaan $5 \cdot 20 + 4 \cdot 24 = 196$ mk. Voimme ajatella tätä vektorien $(5, 4) = 5\bar{i} + 4\bar{j}$ ja $(20, 24) = 20\bar{i} + 24\bar{j}$ skalaaritulona. Kun skalaarituloja lasketaan matriisiesityksellä, osoittautuu hyödylliseksi pitää ensimmäistä tulontekijää vaakavektorina ja toista pystyvektorina. Emme tällöin käytä skalaaritulolle mitään laskutoimitusmerkkiä, vaan kirjoitamme vektorit peräkkäin. Siis

$$\text{vektorien } \begin{pmatrix} 5 & 4 \end{pmatrix} \text{ ja } \begin{pmatrix} 20 \\ 24 \end{pmatrix} \text{ skalaaritulo } = \begin{pmatrix} 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 24 \end{pmatrix} = 5 \cdot 20 + 4 \cdot 24 = 196.$$

Vastaavasti voimme esittää skalaaritulona uimareilta perittävän markkamäärän

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 24 \end{pmatrix} = 2 \cdot 20 + 3 \cdot 24 = 112$$

ja palloilijoilta perittävän

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 24 \end{pmatrix} = 9 \cdot 20 + 6 \cdot 24 = 324.$$

Näiden tulosten muodostamaa vektoria

$$\begin{pmatrix} 196 \\ 112 \\ 324 \end{pmatrix}$$

sanomme *matriisin* A *ja vektorin* $X = \begin{pmatrix} 20 \\ 24 \end{pmatrix}$ *tuloksi*. Merkitsemme tätä tuloa kirjoittamalla matriisin ja vektorin peräkkäin. Siis

$$AX = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 196 \\ 112 \\ 324 \end{pmatrix}.$$

Kun m×n-matriisi A ja n-alkioinen pystyvektori (eli n×1-matriisi) X kerrotaan keskenään (tässä järjestyksessä), niin tuloksena on m-alkioinen pystyvektori (eli m×1-matriisi). Tämän vektorin alkioina ovat matriisin A vaakavektorien skalaaritulot vektorin X kanssa. (Kahden vektorin skalaaritulo on niiden alkioiden kaksittaistulojen summa.)

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + cz \\ dx + ey + fz \end{pmatrix}$$

Esimerkki 1.

(a) $$\begin{pmatrix} 8 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \cdot 1 + (-2)(-3) + 0 \cdot 2 \\ 6 \cdot 1 + 3(-3) + (-4)2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

(b) $\begin{pmatrix} 8 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ ei ole määritelty, sillä matriisin pystyrivien lukumäärä (= 3) eroaa pystyvektorin alkioiden lukumäärästä (= 2).

(c) $\begin{pmatrix} 8 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ ei ole määritelty, sillä kerrottavan vektorin täytyisi tässä tapauksessa olla pystyvektori (tai matriisin täytyisi olla muotoa 3×1 eli pystyvektori).

Neliömatriisin *diagonaali* eli *lävistäjä* muodostuu niistä alkioista, joiden vaaka- ja pystyrivien järjestysnumerot ovat samat.

Esimerkki 2.

(a) Matriisin $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ diagonaalin muodostavat luvut a ja d.

(b) Matriisin $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ diagonaalin muodostavat luvut a_{11}, a_{22} ja a_{33}.

Jos matriisin kaikki diagonaalin ulkopuoliset alkiot = 0, niin kyseessä on *diagonaalimatriisi* eli *lävistäjämatriisi*.

Esimerkki 3. Millä yksinkertaisella tavalla saadaan 2×2-diagonaalimatriisin ja 2-alkioisen pystyvektorin tulo?

Koska

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + 0y \\ 0x + by \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ by \end{pmatrix},$$

niin tulo saadaan kertomalla vektorin alkiot diagonaalin vastaavilla alkioilla. On helppo nähdä (teht. 28), että tämä tulos on voimassa yleisesti $n \times n$-matriisin ja n-alkioisen vektorin tulolle.

2 Kahden matriisin kertolasku

Palaamme esimerkkiimme, jossa saimme juoksijoilta, uimareilta ja palloilijoilta perittävät maksut kertolaskulla

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 196 \\ 112 \\ 324 \end{pmatrix}.$$

Kuvitelkaamme nyt, että tämä ryhmä sai myös lenkkitossuja niin, että kunkin pojan oli maksettava 18 mk ja tytön 15 mk. Kertolasku

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 18 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 18 + 4 \cdot 15 \\ 2 \cdot 18 + 3 \cdot 15 \\ 9 \cdot 18 + 6 \cdot 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 81 \\ 252 \end{pmatrix}$$

osoittaa, että juoksijoiden täytyi maksaa 150 mk, uimareiden 81 mk ja palloilijoiden 252 mk.

Muodostamme vaatteiden hintavektorista $\begin{pmatrix} 20 \\ 24 \end{pmatrix}$ ja lenkkitossujen hintavektorista $\begin{pmatrix} 18 \\ 15 \end{pmatrix}$ matriisin $\begin{pmatrix} 20 & 18 \\ 24 & 15 \end{pmatrix}$. Koska

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 196 \\ 112 \\ 324 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 18 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 81 \\ 252 \end{pmatrix},$$

niin on luontevaa määritellä matriisien $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} 20 & 18 \\ 24 & 15 \end{pmatrix}$ *tulo* seuraavasti

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 & 18 \\ 24 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 196 & 150 \\ 112 & 81 \\ 324 & 252 \end{pmatrix}.$$

Siis tulon ensimmäinen (ja vastaavasti toinen) pystyvektori saadaan kertomalla vasemmanpuolisella tekijällä oikeanpuolisen tekijän ensimmäinen (toinen) pystyvektori. Samalla tavalla määrittelemme matriisien kertolaskun yleisesti.

Olkoon A m×n-matriisi ja B n×s-matriisi. Siis A:lla on oltava yhtä monta pystyriviä kuin B:llä on vaakarivejä. Matriisien A ja B tulon pystyvektorit saadaan kertomalla matriisilla A matriisin B pystyvektorit. Tuloksena on siis m×s-matriisi, jonka i. vaakarivin ja k. pystyrivin alkio saadaan laskemalla A:n i. vaakavektorin ja B:n k. pystyvektorin skalaaritulo.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \\ v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + bz + cv & ay + bu + cw \\ dx + ez + fv & dy + eu + fw \end{pmatrix}$$

Matriisien kertolasku noudattaa liitäntälakia (teht. 25, tutk. teht.) ja osittelulakeja (teht. 26, tutk. teht.), mutta ei vaihdantalakia (teht. 20).

3 Esimerkkejä

Esimerkki 1.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1+3(-1) & 2\cdot 0+3\cdot 2 & 2(-2)+3\cdot 0 \\ 1\cdot 1+(-5)(-1) & 1\cdot 0+(-5)2 & 1(-2)+(-5)0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 6 & -4 \\ 6 & -10 & -2 \end{pmatrix}.$$

Esimerkki 2. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -6 \\ 8 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 6 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Onko tulo **(a)** $C = AB$, **(b)** $C = BA$ määritelty? Jos on, niin ilmoita C:n kertaluku sekä c_{32}.

(a) Koska A:n pystyrivien lukumäärä = B:n vaakarivien lukumäärä, niin C on määritelty. Koska A:lla on neljä vaakariviä ja B:llä kaksi pystyriviä, niin C:n kertaluku on 4×2. Alkio c_{32} = A:n 3. vaakavektorin ja B:n 2. pystyvektorin skalaaritulo = $3\cdot 2 + 9(-4) + 2\cdot 1 = -28$.

(b) Jotta tulo BA olisi määritelty, B:n pystyrivien lukumäärän on oltava sama kuin A:n vaakarivien lukumäärän. Näin ei ole, joten C ei ole määritelty.

Esimerkki 3.

Laske **(a)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, **(b)** $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, **(c)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Tämä on tavallinen vektorien skalaaritulo. Voimme tulkita sen myös 1×3- ja 3×1-matriisien tuloksi, joka siis on 1×1-matriisi eli skalaari. Tulokseksi saamme $1\cdot 5 + 2\cdot 3 + (-3)1 = 8$.

(b) Meidän on kerrottava 3×1-matriisilla 1×3-matriisi, joten tulos on 3×3-matriisi. Saamme

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 1 & 5\cdot 2 & 5(-3) \\ 3\cdot 1 & 3\cdot 2 & 3(-3) \\ 1\cdot 1 & 1\cdot 2 & 1(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & -15 \\ 3 & 6 & -9 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

(c) Meidän on kerrottava 1×3-matriisilla 3×2-matriisi, joten tulos on 1×2-matriisi eli 2-alkioinen vaakavektori. Sen ensimmäisen alkion olemme laskeneet a-kohdassa. Toinen alkio on

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1(-6) + 2 \cdot 2 + (-3)0 = -2.$$

Kysytty tulo on siis $(8\ -2)$.

Esimerkki 4. *Identtinen matriisi* on sellainen diagonaalimatriisi, jonka kaikki diagonaalialkiot = 1. Sellaiselle identtiselle matriisille, jonka dimensio = n, käytämme merkintää I_n. Ellei dimensiota tarvitse korostaa, käytämme lyhempää merkintää I. Osoita, että identtinen 2×2-matriisi I toteuttaa yhtälön $AI = IA = A$ kaikilla 2×2-matriiseilla A.

Merkitsemällä $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ saamme

$$AI = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot 1 + b \cdot 0 & a \cdot 0 + b \cdot 1 \\ c \cdot 1 + d \cdot 0 & c \cdot 0 + d \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A,$$

$$IA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1a + 0c & 1b + 0d \\ 0a + 1c & 0b + 1d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A.$$

Tulos on helppo yleistää mielivaltaisille dimensioille.

Harjoitustehtäviä

15. Laske

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

16. Olkoon $M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$, $M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Laske **(a)** $M_1 M_2$, **(b)** $M_3 M_4$, **(c)** $M_1 M_3 M_4$, **(d)** $M_1 M_2 M_3 M_4$.

17. Olkoon $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Laske **(a)** $M_1 M_1$, **(b)** $M_1 M_2$, **(c)** $M_2^T M_1$.

18. Olkoon $M_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

Laske, mikäli mahdollista, **(a)** $M_3 M_2$, **(b)** $M_1^T M_2$, **(c)** $M_1 M_2$, **(d)** $M_2^T M_3 M_1$, **(e)** $M_2 M_3 M_1$.

19. Laske **(a)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$, **(b)** $\begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

20. Olkoon $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$. Laske AB ja BA. Onko kertolaskun vaihdantalaki voimassa?

21. Jos $AB = BA$, sanomme, että matriisit A ja B *kommutoivat*. Määritä kaikki matriisit, jotka kommutoivat matriisin $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ kanssa.

22. Olkoon $A \in \mathbf{R}^{2\times3}$, $B \in \mathbf{R}^{2\times4}$. Onko tulo **(a)** AB, **(b)** BA, **(c)** A^TB, **(d)** B^TA määritelty? Jos on, niin ilmoita tulomatriisin kertaluku.

23. Tiedetään, että $A \in \mathbf{R}^{3\times5}$ ja $AB \in \mathbf{R}^{3\times7}$. Mikä on tällöin matriisin B kertaluku?

24. Olkoon A mielivaltainen matriisi. **(a)** Osoita, että $A^T A$ on aina määritelty. **(b)** Laske $A^T A$, kun

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -9 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

25. Todista 2×2-matriiseille kertolaskun liitäntälaki $A(BC) = (AB)C$. Siksi sulut voidaan jättää pois ja kirjoittaa ABC.

26. Todista 2×2-matriiseille kertolaskun osittelulaki **(a)** $A(B + C) = AB + AC$, **(b)** $(A + B)C = AC + BC$.

27. Olkoot A ja B sellaisia matriiseja, että tulo AB on määritelty. **(a)** Osoita vastaesimerkillä, että $(AB)^T = A^T B^T$ ei ole yleisesti voimassa. **(b)** Sen sijaan on voimassa $(AB)^T = B^T A^T$. Todista tämä 2×2-matriiseille.

28. Millä yksinkertaisella tavalla saadaan diagonaalimatriisin ja pystyvektorin tulo?

29. Eräs suksitehdas valmistaa murtomaa- ja tunturisuksia. Yhden suksiparin valmistamiseen tarvitaan tehdastyötä ja viimeistelyä seuraavan taulukon mukaan.

Aika (tunteina)

	Tehdastyö	Viimeistely
Murtomaa	6	2
Tunturi	7	1

Työvoimakustannukset tehtaan koti- ja ulkomaisessa tuotantolaitoksessa ovat seuraavan taulukon mukaiset.

Työvoimakustannukset (markkaa tunnissa)

	Suomessa	Ulkomailla
Tehdastyö	150	110
Viimeistely	140	100

Olkoon T edellistä ja K jälkimmäistä taulukkoa vastaava matriisi. Laske matriiseista TK ja KT se, jonka alkiot ovat mielekkäästi tulkittavissa. Mikä on näiden alkioiden merkitys?

30. Koulun näytelmässä esiintyy 8 poikaa ja 10 tyttöä. Yhden näyttelijän pukuun tarvitaan kangasta (m), nauhaa (m) ja koristenappeja (pkt) seuraavasti.

	Kangasta	Nauhaa	Nappeja
Poika	5	4	3
Tyttö	6	5	2

Oletetaan, että kangas maksaa 16 mk/m, nauha 8 mk/m ja napit 2 mk/pkt. Suorita kertolasku

$$\begin{pmatrix} 8 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ja tulkitse tulos.

Tutkimustehtävä: *Matriisitulon laskulakeja*

Todista:

(a) $A(BC) = (AB)C$ kaikilla $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbf{R}^{n \times p}$, $C \in \mathbf{R}^{p \times q}$, joten sulut voidaan jättää pois ja siis kirjoittaa ABC,

(b) $A(B + C) = AB + AC$ kaikilla $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $B, C \in \mathbf{R}^{n \times p}$,
$(A + B)C = AC + BC$ kaikilla $A, B \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $C \in \mathbf{R}^{n \times p}$,

(c) $(AB)^T = B^T A^T$ kaikilla $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbf{R}^{n \times p}$.

Ohje:

Merkitse $[M]_{ik}$ tarkoittamaan matriisin M *i*. vaakarivin ja *k*. pystyrivin alkiota. $[A(BC)]_{ik} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} [BC]_{rk} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} \sum_{s=1}^{p} b_{rs} c_{sk} = \ldots$.

Tutkimustehtävä: *1× 1-matriisit ja skalaarit*

Mikä ristiriita syntyy matriisien kertolaskussa, kun 1×1-matriisit ja skalaarit samastetaan.

Tutkimustehtävä: *Matriisin jälki*

Neliömatriisin $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ *jälki* (trace) tr A on diagonaalialkioiden summa

$$\operatorname{tr} A = a_{11} + \ldots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} .$$

Todista:

(a) $\operatorname{tr} A^T A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2$ kaikilla $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$,

(b) $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$ kaikilla $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$.

1.3 Matriisin potenssi

Alkupalat

1. Laske (a) a^5a^3, (b) $(a^5)^3$, (c) a^{5^3}.

2. Miten luvun (a) 4., (b) 10., (c) 100. potenssi voidaan laskea niin, että kertolaskuja tarvitaan mahdollisimman vähän?

1 Potenssin määritelmä ja laskusääntöjä

Määrittelemme neliömatriisin A *potenssin* A^p, missä eksponentti $p \in \mathbf{Z}_+$, luonnollisella tavalla

$$A^p = AA\ldots A \text{ (}p\text{ tekijää).}$$

Lisäksi määrittelemme $A^0 = I$.

Samankantaisten potenssien kertosääntö

$$A^pA^q = A^{p+q}$$

ja potenssin potenssin sääntö

$$(A^p)^q = A^{pq}$$

voidaan todistaa aivan samalla tavalla kuin reaalilukujen potenssin vastaavat säännöt (teht. 36). Sen sijaan tulon potenssin sääntö $(AB)^p = A^pB^p$ ei ole yleisesti voimassa (teht. 37).

Esimerkki. Laske A^4, kun $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Koska

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 3 & 1\cdot 2+2\cdot 4 \\ 3\cdot 1+4\cdot 3 & 3\cdot 2+4\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix},$$

niin

$$A^4 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\cdot 7+10\cdot 15 & 7\cdot 10+10\cdot 22 \\ 15\cdot 7+22\cdot 15 & 15\cdot 10+22\cdot 22 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 199 & 290 \\ 435 & 634 \end{pmatrix}.$$

2 Väestön liikkuvuuden malli

Yhdysvalloissa on tutkittu kaupunkilaisten liikkuvuutta keskustan ja lähiöiden välillä 1969–1971. Yhden vuoden aikana keskustalaisista pysyi keskustassa 96 % ja muutti lähiöihin 4 %, kun taas lähiöläisistä pysyi lähiöissä 99 % ja muutti keskustaan 1 %. Muuttoliike kaupungin ja maaseudun välillä oli niin vähäinen, että se voitiin jättää huomiotta. Esitämme nämä tulokset taulukossa todennäköisyyksinä.

	Vuoden lopussa	
Vuoden alussa	Keskusta	Lähiö
Keskusta	0,96	0,04
Lähiö	0,01	0,99

Vuoden 1971 lopussa kaupunkien keskusta-asukkaita oli kaikkiaan 57 633 000 ja lähiöasukkaita 71 549 000. Kysymme, miten väestöjakauma keskustan ja lähiöiden välillä muuttuu, kun sekä muuttoliikkeen että kaupunkilaisten lukumäärän oletetaan pysyvän suunnilleen samana.

Vuoden 1972 lopussa keskustalaisten määrä (tuhansina) = niiden määrä, jotka pysyivät keskustassa + niiden määrä, jotka muuttivat lähiöistä keskustaan = 0,96 · 57 633 + 0,01 · 71 549 = 56 043. Vastaavasti lähiöläisten määrä = 0,04 · 57 633 + 0,99 · 71 549 = 73 139. Saamme siis vuoden 1972 "väestövektorin" (56 043   73 139) vuoden 1971 väestövektorista (57 633   71 549) matriisikertolaskulla

$$(57\,633 \quad 71\,549)\begin{pmatrix} 0{,}96 & 0{,}04 \\ 0{,}01 & 0{,}99 \end{pmatrix} = (56\,043 \quad 73\,139).$$

Tässä siis käsittelemme vektoreita vaakavektoreina. Samalla tavalla saamme vuoden 1973 vektorin vuoden 1972 vektorista

$$(56\,043 \quad 73\,139)\begin{pmatrix} 0{,}96 & 0{,}04 \\ 0{,}01 & 0{,}99 \end{pmatrix} = (54\,532 \quad 74\,649).$$

Jatkamme vastaavasti. Kokoamme tulokset taulukkoon.

Vuosi	Keskusta	Lähiö
1971	57 633	71 549
1972	56 043	73 139
1973	54 532	74 649
1974	53 098	76 084
1975	51 735	77 447
1976	50 440	78 742

Katsomme, mitä tapahtuisi, jos tämä malli olisi voimassa myös pitkillä aikaväleillä. Todellisuudessa niin ei ole. Väestövektori t vuoden kuluttua vuodesta 1971 on

$$(57\,633 \quad 71\,549)\begin{pmatrix} 0{,}96 & 0{,}04 \\ 0{,}01 & 0{,}99 \end{pmatrix}^t.$$

Saamme täten seuraavan taulukon.

Aika (vuosia)	Keskusta	Lähiö
10	44 874	84 307
20	37 235	91 947
50	28 283	100 899
100	26 025	103 157
200	25 838	103 344
300	25 836	103 346
400	25 836	103 346

Siis vasta noin 300 vuoden kuluttua väestöjakauma alkaisi pysyä suunnilleen samana. (Tämä tulos on täysin merkityksetön, sillä malli ei pysy voimassa näin pitkää aikaa.)

3 Markovin ketjut

Edellisessä esimerkissämme voimme ajatella, että tietyllä kaupunkilaisella on kaksi mahdollista *tilaa*: asua kaupungissa tai asua lähiössä. Annamme edelliselle tilalle numeron 1 ja jälkimmäiselle numeron 2. *Siirtymämatriisin*

$$P = \begin{pmatrix} 0,96 & 0,04 \\ 0,01 & 0,99 \end{pmatrix}$$

alkio p_{ik} ilmoittaa, millä todennäköisyydellä tämä kaupunkilainen siirtyy tilasta i tilaan k. *Tilavektori* ilmoittaa, millä todennäköisyydellä hän on missäkin tilassa. Vuotta 1971 vastaavan tilavektorin X_0 saamme jakamalla väestövektorin (57 633 71 549) väestön kokonaismäärällä 57 633 + 71 549 = 129 182. Siis $X_0 = (0{,}446 \quad 0{,}554)$ eli kaupunkilainen asuu todennäköisyydellä 0,446 keskustassa ja todennäköisyydellä 0,554 lähiössä. Vuoden kuluttua tilavektori on

$$X_1 = X_0 P,$$

kahden vuoden kuluttua

$$X_2 = X_1 P = (X_0 P) P = X_0 P^2$$

ja yleisesti t vuoden kuluttua

$$X_t = X_{t-1} P = (X_{t-2} P) P = X_{t-2} P^2 = \ldots = X_0 P^t.$$

Yleisellä *Markovin ketjulla* on n tilaa, jolloin siirtymämatriisi on $n \times n$-matriisi ja tilavektori on n-alkioinen vaakavektori. Siirtymämatriisin kaikki alkiot ovat todennäköisyyksiä, joten ne ovat lukujen 0 ja 1 välissä. Tämän matriisin kaikki vaakarivisummat = 1. Nimittäin i. vaakarivisumma = todennäköisyys sille, että i. tilasta siirrytään 1. tai 2. tai... tai n. tilaan = varman tapahtuman todennäköisyys 1. Vastaavasti tilavektorin kaikki alkiot ovat 0:n ja 1:n välissä ja niiden summa = 1.

4 Markovin ketjun stabiilius

Tarkastelemme Markovin ketjun tilavektoria $X_t = X_0P^t$, kun $t \to \infty$. Jos tämä vektori lähestyy (alkioittain) samaa raja-arvovektoria alkutilavektorista X_0 riippumatta, niin sanomme, että Markovin ketju on *stabiili* ja että tämä raja-arvovektori on sen *tasapainovektori*. Voidaan todistaa, että Markovin ketju on stabiili, jos sen siirtymämatriisin kaikki alkiot ovat > 0. Tällöin voimme määrittää tasapainovektorin $X = \lim\limits_{t\to\infty} X_t$ antamalla $t \to \infty$ rekursioyhtälössä $X_t = X_{t-1}P$ ja ratkaisemalla saadun yhtälön $X = XP$ (vektoriyhtälö, joka palautuu lineaariseksi skalaariyhtälöryhmäksi).

Esimerkki. Palaamme muuttoliike-esimerkkiimme. Olemme huomanneet, että väestövektori lähestyy vektoria (25 836 103 346), kun $t \to \infty$. Jakamalla väestön kokonaismäärällä 129 182 saamme vastaavaksi tilavektoriksi (0,200 0,800). Kokeilemalla näemme, että samaan tulokseen päädytään, olipa alkuperäinen tilavektori mikä tahansa. Näyttää siis siltä, että tasapainovektori on $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$. Tutkimme asiaa tarkemmin ratkaisemalla yhtälön $X = XP$ eli

$$(x_1 \; x_2) = (x_1 \; x_2)\begin{pmatrix} 0,96 & 0,04 \\ 0,01 & 0,99 \end{pmatrix}.$$

Kirjoitamme tämän tämän yhtälöparina

$$\begin{cases} x_1 = 0,96x_1 + 0,01x_2 \\ x_2 = 0,04x_1 + 0,99x_2, \end{cases}$$

jonka saamme edelleen muotoon

$$\begin{cases} 0,04x_1 - 0,01x_2 = 0 \\ -0,04x_1 + 0,01x_2 = 0. \end{cases}$$

Koska jälkimmäinen yhtälö saadaan kertomalla edellinen (–1):llä, se voidaan jättää pois. Yhtälöpari on siis yhtäpitävä yhtälön $0,04x_1 - 0,01x_2 = 0$ eli $4x_1 - x_2 = 0$ kanssa. Voimme valita mielivaltaisesti $x_1 = t$, jolloin $x_2 = 4t$. Jotta kysymyksessä olisi tilavektori, täytyy olla $x_1 + x_2 = 1$ eli $5t = 1$, josta $t = \frac{1}{5}$. Siis $x_1 = \frac{1}{5}$, $x_2 = \frac{4}{5}$, joten tasapainovektori on todellakin $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$.

5 Turnausmatriisi

Pelaajat A, B, C, D ja E pelaavat tietyssä kahden pelaajan pelissä turnauksen, jossa jokainen pelaa jokaista vastaan kerran. Oletamme, ettei tasapelejä ole. Pelin tuloksessa kiinnitämme huomiota vain siihen, kumpi voitti, emmekä pelaajien saamiin maaleihin tms. Tavanomainen menetelmä pelaajien paremmuusjärjestyksen määrittämiseksi on antaa jokaisesta voitosta 1 piste ja tappiosta 0 pistettä. Ei ole olemassa menetelmää, jolla tasapisteet saaneiden järjestys voitaisiin aina ratkaista. Jos esimerkiksi A voittaa B:n, B voittaa C:n, C voittaa A:n ja kaikki nämä kolme pelaajaa voittavat D:n ja E:n, niin A:n, B:n ja C:n keskinäinen järjestys ei ole millään järkevällä tavalla ratkaistavissa.

Tavanomaisessa pisteytyksessä kaikki voitot ovat samanarvoisia. Kuitenkin voitto hyvästä pelaajasta tuntuu arvokkaammalta kuin voitto huonosta. Otamme tehtäväksemme laatia pisteytyksen, jossa tämä voittojen eriarvoisuus näkyy. Sanomme, että pelaaja X *voittaa välillisesti* pelaajan Y, jos on olemassa sellainen pelaaja Z, että X voittaa Z:n ja Z voittaa Y:n. Jos on olemassa useampia kuin yksi tällainen Z, niin X:llä on vastaavasti useampi kuin yksi välillinen voitto Y:stä. Teemme pisteytyksen, jossa otetaan huomioon tavanomaisten voittojen lisäksi välilliset voitot.

Kuvitelkaamme, että turnaus päättyy seuraavan taulukon mukaan, jossa 1 tarkoittaa voittoa ja 0 tappiota.

	Vastustaja				
Pelaaja	A	B	C	D	E
A	–	0	1	1	0
B	1	–	1	0	1
C	0	0	–	1	0
D	0	1	0	–	0
E	1	0	1	1	–

Esimerkiksi B-vaakarivin ja C-pystyrivin alkio 1 tarkoittaa, että B voitti C:n. Vastaavasti C-vaakarivin ja B-pystyrivin alkio 0 tarkoittaa, että C hävisi B:lle. Muodostamme *turnausmatriisin*

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Tämän diagonaali = 0, koska pelaajat eivät pelaa itseään vastaan eivätkä siis saa sillä tavalla pisteitä.) Matriisin

$$T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

2. vaakarivin ja 3. pystyrivin alkio

$$1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 2$$

ilmoittaa B:n C:stä saamien välillisten voittojen lukumäärän. Ensimmäinen yhteenlaskettava $1 \cdot 1$ tulee näet siitä, että B voittaa A:n ja A voittaa C:n, ja viides yhteenlaskettava $1 \cdot 1$ siitä, että B voittaa E:n ja E voittaa C:n. Vastaava tulos on voimassa yleisesti. Siis T^2 ilmoittaa pelaajien välilliset voitot muista pelaajista.

Välittömien ja välillisten voittojen yhteismäärän ilmoittaa matriisi

$$V = T + T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

jonka vaakarivisummista näemme lopulliset pistemäärät. Siis A:n pistemäärä $= 0 + 1 + 1 + 2 + 0 = 4$ ja muut vastaavasti. Täten pelaajien järjestys on

B 9 p., E 7 p., A ja D 4 p., C 2 p. Tavanomaisen pisteytyksen mukaan järjestys olisi B ja E 3 p., A 2 p., C ja D 1 p.

Yleisesti voidaan todistaa, että jokaisessa turnauksessa on ainakin yksi sellainen pelaaja, joka voittaa kaikki muut pelaajat joko välittömästi tai (ainakin kerran) välillisesti.

Harjoitustehtäviä

31. Olkoon $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Laske **(a)** A^3, **(b)** A^4.

32. Olkoon $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Laske A^2.

33. Määritä jokin 2×2-matriisi $A \neq \pm I$, jolle $A^2 = I$.

34. Määritä jokin 2×2-matriisi $A \neq O$, jolle $A^2 = O$.

35. Olkoot A ja B samaa kertalukua olevia neliömatriiseja. Onko **(a)** $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, **(b)** $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ yleisesti voimassa?

36. Olkoon A neliömatriisi.
Todista: **(a)** $A^pA^q = A^{p+q}$, **(b)** $(A^p)^q = A^{pq}$ kaikilla $p, q \in \mathbf{N}$.

37. Olkoot A ja B samaa kertalukua olevia neliömatriiseja ja $p \in \mathbf{N}$. Osoita, että $(AB)^p = A^pB^p$ ei ole yleisesti voimassa.

38. Miten diagonaalimatriisin potenssi voidaan laskea?

39. Oletetaan, että sadepäivää seuraa sadepäivä todennäköisyydellä 0,6 ja siis poutapäivä todennäköisyydellä 0,4. Edelleen oletetaan, että poutapäivää seuraa poutapäivä todennäköisyydellä 0,8 ja siis sadepäivä todennäköisyydellä 0,2. Jos tänään sataa, niin millä todennäköisyydellä sataa **(a)** 5 päivän, **(b)** 10 päivän kuluttua, **(c)** tiettynä päivänä pitkän ajan kuluttua?

40. Jatkoa tehtävään 39. Olkoon p_t todennäköisyys sille, että sataa t päivän kuluttua, kun tänään sataa. **(a)** Esitä p_t todennäköisyyden p_{t-1} avulla. **(b)** Ratkaise näin saatu rekursioyhtälö (ks. MT 10, luku 3.1). **(c)** Sijoita ratkaisuun $t = 5$ ja $t = 10$ ja totea, että saat edellisen tehtävän a- ja b-kohtien tulokset. **(d)** Määritä ratkaisun raja-arvo, kun $t \to \infty$, ja totea, että saat edellisen tehtävän c-kohdan tuloksen.

41. Erääsen maahan pääsee vain rajanylityspaikkojen A, B ja C kautta. Salakuljettaja S läpäisee menestyksellisesti tavallisen tullin, mutta jää kiinni, jos paikalla on tietty poliisin erikoisryhmä E. S on saanut käsiinsä tilaston, jonka mukaan E:llä on tapana liikkua seuraavasti:

	Huomenna		
Tänään	A	B	C
A	0,7	0,2	0,1
B	0,1	0,6	0,3
C	0,2	0,2	0,6

Siis jos E on tänään A:ssa, niin se on huomenna B:ssä todennäköisyydellä 0,2 jne. Minkä paikan kautta S:n kannattaa yrittää tulla maahan, kun hän **(a)** tietää, että E oli eilen A:ssa, **(b)** tietää, että E oli toissapäivänä B:ssä, **(c)** ei tiedä, missä E on ollut edellisinä päivinä?

42. Jatkoa turnausesimerkkiin. Voidaanko tätä menetelmää käyttää silloinkin, kun tasapelit ovat mahdollisia?

43. Jatkoa turnausesimerkkiin. **(a)** Mikä merkitys on matriisilla T^3? **(b)** Kannattaako laatia matriisin $T + T^2 + T^3$ mukainen pisteytys? **(c)** Mikä olisi kohdassa 5 mainitun turnauksen tulos tällöin?

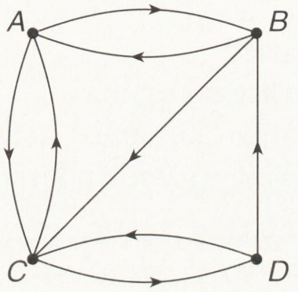
© Lehtikuva Oy

Tutkimustehtävä: *Digraafi ja sen matriisi*

Kuvitelkaamme, että kaupunkien A, B, C ja D välillä on seuraavat lentoyhteydet:

A:sta pääsee B:hen ja C:hen, mutta ei D:hen,
B:stä pääsee A:han ja C:hen, muttei D:hen,
C:stä pääsee A:han ja D:hen, muttei B:hen,
D:stä pääsee B:hen ja C:hen, muttei A:han.

Voimme havainnollistaa tätä *suunnatulla graafilla* eli *digraafilla* (lyhennys sanoista "directed graph"), jonka *solmut* vastaavat kaupunkeja ja *suunnatut kaaret* lentoyhteyksiä. Digraafin *matriisille* M *on* $m_{ik} = 1$, jos i. solmusta on suunnattu kaari k. solmuun, ja $m_{ik} = 0$, ellei tällaista kaarta ole.



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Diagonaali = 0, koska mistään kaupungista ei pääse itseensä yhdellä lennolla.)

(a) Laske M^2 ja M^3.
(b) Mikä merkitys on näiden matriisien alkioilla?
(c) Mikä yleinen tulos on voimassa?

Tutkimustehtävä: *Sanageneraattori*

Otamme tehtäväksemme laatia sellaisia keinotekoisia sanoja, jotka rakenteeltaan ovat annetun joukon sanojen kaltaisia. Pidämme sanan muodostamista Markovin ketjuna, jonka tiloina ovat suomenkieliset aakkoset A, B, C, ..., Ä, Ö ja sanan "loppumerkki" $*$. Tilojen lukumäärä on siis 28.

Teemme aluksi suomenkielisiä pojannimiä muistuttavia keinotekoisia nimiä kalenterin nimipäiväluettelon perusteella. Voisimme laskea siirtymätodennäköisyydet tietokoneella. Emme kuitenkaan tee niin, vaan käytämme seuraavaa mukavaa algoritmia, jossa siirtymämatriisia ei tarvitse määrittää.

1. Järjestä kalenterin nimet satunnaisesti.
2. Ota ensimmäisen nimen ensimmäinen kirjain.
3. Etene listassa, kunnes kohtaat tämän kirjaimen uudelleen. Ota sitä seuraava kirjain. Myös loppumerkkiä $*$ pidetään kirjaimena.
4. Siirry kohtaan 3.

Tutkimme, miten tämä algoritmi toimii, kun nimien järjestys on sama kuin nimipäivien aikajärjestys. Samalle päivälle osuvista nimistä otamme mukaan vain ensimmäisen.

Ensimmäinen kirjain on A (Aapeli 2.1). Uusi A kohdataan välittömästi, ja sitä seuraa P, mikä otetaan. On siis saatu AP. Uusi P kohdataan 25.1 (Paavo), jota seuraa A. On siis saatu APA. Uusi A löytyy välittömästi, ja sitä seuraa V. On siis saatu APAV. Uusi V löytyy 27.1 (Viljo), jota seuraa I. On siis saatu APAVI. Uusi I löytyy 29.1 (Valtteri). Sitä seuraa loppumerkki $*$, joten on saatu APAVI $*$. Siis ensimmäinen "nimi" *Apavi* on valmis. Uusi $*$ löytyy 3.2 (Valo $*$), jota seuraa A (5.2 Asser). On siis saatu APAVI $*$ A. Jatketaan vastaavasti. Mikä nimi saadaan seuraavaksi?

Parempia tuloksia saadaan pitämällä sanan muodostamista *toisen kertaluvun* Markovin ketjuna, jolloin tila riippuu kahdesta edellisestä tilasta. Algoritmi on tällöin seuraava.

1. Järjestä kalenterin nimet satunnaisesti.
2. Ota ensimmäisen nimen kaksi ensimmäistä kirjainta.

3. Etene listassa, kunnes kohtaat tämän kirjainparin uudelleen. Ota sitä seuraava kirjain. Lisää se parin loppuun ja poista saadusta kirjainkolmikosta ensimmäinen. Myös loppumerkkiä $*$ pidetään kirjaimena.
4. Siirry kohtaan 3.

Tutkimme nyt miten tämä algoritmi toimii, kun nimien järjestys on sama kuin edellä ja aloitamme alusta.

Ensimmäinen kirjainpari on AA (Aapeli 2.1). Uusi AA kohdataan 25.1 (Paavo), jota seuraa V. On siis saatu AAV. Uusi AV löytyy 29.7 (Olavi), ja sitä seuraa I. On siis saatu AAVI. Uusi VI löytyy 18.8 (Leevi), ja sitä seuraa $*$. Siis ensimmäinen nimi *Aavi* on valmis. Miten jatketaan? Mikä nimi saadaan seuraavaksi?

Kirjassaan *Survo ja minä* professori Seppo Mustonen laatii tietokoneella keinotekoisia suomenkielisiä tytönnimiä käyttämällä tätä menetelmää. Tulokset ovat seuraavan "Survo-kaavion" mukaiset. Todelliset tytönnimet ovat satunnaisessa järjestyksessä riveillä 2–34. Rivit 2–25 puuttuvat kuvasta. Keinotekoiset tytönnimet alkavat riviltä 36.

```
18  1 SURVO 84C EDITOR Thu Aug 15 13:39:06 1996          C:\KIRJA\ 200 100 0
26 *Aune Helmi Karoliina Sirkka Sirja Hilma Veera Lotta Vappu Onerva Kielo
27 *Elisa Aliisa Lauha Mari Unelma Meri Lemmikki Irja Kaino Anni Pirita
28 *Sinikka Kaisu Venla Jonna Alma Amanda Milla Hilla Marjukka Henni Vieno
29 *Aura Eine Hilkka Eija Liisa Ulpu Irma Mirkka Impi Kirsi Heli Valpuri
30 *Linnea Henna Floora Virva Anu Maire Kristiina Virpi Sylvia Silva Lilja
31 *Raisa Ruut Alli Kaarina Emmi Milja Solja Tuomi Raija Heljä Aili Lea
32 *Inari Saima Ritva Liina Henriikka Mira Soila Pirjo Auri Johanna Suvi
33 *Päivi Inkeri Saara Auli Maili Armi Alina Emilia Raila Sointu Loviisa
34 *Sylvi Sirkku Helvi
35 *
36 *MARKOV 2,34,CUR+1_ / DEGREE=2
37 *Helkka Sata Maija Helma Jonja Vieli Lota Tuulma Maija Soin Hanjaari Ina
38 *Siri Maro Eira Oilda Alma Maara Velmi Tea Vanni Sisterhikko Tiitta
39 *Reijukki Estiina Soha Mertta Maara Lilja Mari Maritvi Maara One Katju
40 *Auri Sora Marja Lovia Maakki Sinea Marmetta Leni Raija Lota Saija Elisa
41 *Jonja Marjo Sivi Leenli Jeervi Marjo Iira Marja Raila Rita Silda
42 *Tuijukki Estiina Salvi Airvokki Irmi Päiviitta Veen Ilmelli Marjo Iira
43 *Pirkki Pukka Maimma Henna Leni Ailma Varka Tuijukki Raija Soin Hanjaari
44 *Ella Emi Tyylla Elmu Sina Suvikka Helmikka Sanelja Villiisa Iina Anne
45 *Helvi Nienna Marju Alma Maara Velmi Tea Vanni Sisterhikko Tiitta
46 *Reijukki Estiina Soha Lauliirsi Leenli Jeli Ulpu Heleoha Elvi Hilli Siri
47 *Maro Eira Oilda Tuijukki Estiina Salvi Airvokki Irmi Päiviitta Veen
48 *Ilmelli Marjo Impi Sanelja Helmikku Helja Kasa Inketa Elvi Rauha Mili
```

Jos harrastat ohjelmointia, niin ohjelmoi sanageneraattori. Voit muodostaa sillä paitsi keinotekoisia nimiä, myös esimerkiksi erikielisiä keinotekoisia sanoja.

1.4 Käänteismatriisi

Alkupalat

1. Olkoon $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Määritä sellainen matriisi B, että $AB = I$.

2. Jatkoa. Onko tällöin myös $BA = I$?

1 Käänteismatriisin määritelmä

Jos reaaliluku $a \neq 0$, niin on olemassa sellainen reaaliluku b, että $ab = 1$. Koska reaalilukujen kertolasku on vaihdannainen, niin tällöin myös $ba = 1$. Tämä luku $b = a^{-1}$ on luvun a *käänteisluku*. Tutkimme, onko matriiseilla vastaava ominaisuus. Olkoon A neliömatriisi. Kysymme siis, onko olemassa sellaista neliömatriisia B, että $AB = I$. Koska matriisien kertolasku ei ole vaihdannainen, niin emme voi suoraan päätellä, että tällöin $BA = I$. Voidaan kuitenkin todistaa (teht. 56), että näin on. Jos tällainen B on olemassa, niin sanomme, että A on *kääntyvä*, kutsumme matriisia B matriisin A *käänteismatriisiksi* ja merkitsemme $B = A^{-1}$.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Nollasta eroavan reaaliluvun käänteisluku on *yksikäsitteinen*. Toisin sanoen tällaisella luvulla on yksi käänteisluku, muttei useampia. Myös käänteismatriisi on yksikäsitteinen, mikäli se on olemassa. Jos näet B ja C ovat matriisin A käänteismatriiseja, niin $AB = BA = I$ ja $AC = CA = I$, joten

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C.$$

2 2×2-matriisin kääntäminen

Käänteismatriisin laskeminen eli *matriisin kääntäminen* voidaan suorittaa kätevästi tietokoneella tai graafisella laskimella. Jos matriisin dimensio on 2 tai 3 taikka jos matriisin tyyppi on muuten sopiva, niin apuvälineitä ei tarvita. Tarkastelemme 2×2-matriisin kääntämistä aluksi esimerkillä.

Esimerkki 1. Laske A^{-1}, kun $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$.

Määritämme sellaisen matriisin $B = \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}$, että $AB = I$. Koska

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-3y & 2u-3v \\ 4x-5y & 4u-5v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

saamme vertaamalla pystyrivejä yhtälöparit

$$\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 4x-5y=0 \end{cases} \text{ ja } \begin{cases} 2u-3v=0 \\ 4u-5v=1. \end{cases}$$

Näiden ratkaisut ovat $x = -\frac{5}{2}$, $y = -2$, $u = \frac{3}{2}$, $v = 1$, joten

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Laskemalla tai tehtävän 56 avulla huomaamme, että myös $BA = I$, joten B on kysytty käänteismatriisi.

Tarkastelemme nyt yleistä 2×2-matriisia

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Jos $ad - bc \neq 0$, niin huomaamme samalla tavalla kuin edellä (teht. 55), että A on kääntyvä ja

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Esimerkki 2. Olkoon $X, Y \in \mathbf{R}^2$. Osoita, että matriisi $A = XY^T$ ei ole kääntyvä.

Tässä siis X ja Y ovat pystyvektoreita, joten Y^T on vaakavektori. Merkitsemme

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

jolloin

$$A = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 \\ x_2y_1 & x_2y_2 \end{pmatrix}.$$

Nyt $(x_1y_1)(x_2y_2) - (x_1y_2)(x_2y_1) = 0$, mistä väitös seuraa.

3 Käänteismatriisin ominaisuuksia

Jokainen 0:sta eroava reaaliluku on oman käänteislukunsa käänteisluku. Vastaava ominaisuus on matriiseilla.

Jos A on kääntyvä neliömatriisi, niin A^{-1} on kääntyvä ja $(A^{-1})^{-1} = A$.

Tämän näemme oikeaksi katsomalla käänteismatriisin määritelmää $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ "A^{-1}:n kannalta". Huomaamme, että matriisi A on sellainen, jolla kertomalla A^{-1} saadaan I. Siis A on A^{-1}:n käänteismatriisi.

Reaalilukujen tulon käänteisluku on käänteislukujen tulo. Vastaava tulos ei ole sellaisenaan voimassa matriisitulon käänteismatriisille, sillä tulon ei-vaihdannaisuuden takia tekijöiden järjestys on vaihdettava.

Jos A ja B ovat kääntyviä samandimensioisia neliömatriiseja, niin AB on kääntyvä ja $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Todistamme tämän. Matriisin AB käänteismatriisin on oltava sellainen, että kerrottaessa sillä AB kummalta puolelta tahansa saadaan I. Kertomalla AB oikealta $B^{-1}A^{-1}$:llä saamme

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I.$$

Kertomalla vastaavasti vasemmalta tai käyttämällä tehtävän 56 tulosta väitös seuraa.

Lopuksi toteamme, että kääntämisen ja transponoimisen järjestystä voidaan vaihtaa.

Jos A *on kääntyvä neliömatriisi, niin* A^T *on kääntyvä ja* $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Todistuksen jätämme harjoitustehtäväksi (teht. 53).

Esimerkki. Olkoot A ja B sellaisia samandimensioisia kääntyviä neliömatriiseja, että $A^{-1} + B^{-1}$ on kääntyvä. Sievennä $A^{-1}(A^{-1} + B^{-1})^{-1}B^{-1}$.

Tulon käänteismatriisin sääntö on voimassa useammallekin kuin kahdelle tekijälle (teht. 54), joten

$$\begin{aligned} A^{-1}(A^{-1} + B^{-1})^{-1}B^{-1} &= (B(A^{-1} + B^{-1})A)^{-1} = (BA^{-1}A + BB^{-1}A)^{-1} \\ &= (BI + IA)^{-1} = (B + A)^{-1} = (A + B)^{-1}. \end{aligned}$$

4 Salakirjoitus

Yksinkertaisin salakirjoitusmenetelmä, jossa eri *kirjaimet* koodataan eri tavoilla (ks. Caesarin menetelmä MT 11, s. 96), on helppo murtaa. Jos sen sijaan eri *kirjainparit* koodataan eri tavoilla, niin menetelmän murtaminen vaikeutuu. Tutkimme tätä. Aluksi koodaamme numeerisesti suomenkieliset aakkoset ja sanan "loppumerkin" $*$.

$$A = 00,\ B = 01,\ C = 02,\ \ldots,\ Ä = 25,\ Ö = 26,\ * = 27.$$

Viestin lähettäjä ja vastaanottaja sopivat salakirjoituksen avaimeksi sellaisen 2×2-matriisin, jonka alkiot ja käänteismatriisin alkiot ovat kokonaislukuja. Lahettäjä koodaa viestin numeerisesti, jakaa sen kahden luvun ryhmiin, kertoo näin saadut 2-alkioiset vektorit avainmatriisilla ja kirjoittaa tuloksina olevat 2-alkioiset vektorit peräkkäin. Vastaanottaja jakaa viestin kahden luvun ryhmiin, kertoo saadut vektorit avaimen käänteismatriisilla, kirjoittaa tulokset peräkkäin ja dekoodaa näin saadun lukujonon kirjainmuotoon.

Esimerkki 1. Kryptaa (eli kirjoita salakielellä) viesti ”Älä myy”, kun avainmatriisi on

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Numeerisesti viesti on ”25 11 25 27 12 23 23 27”. (Saadaksemme lukujen määrän parilliseksi kirjoitamme viestin loppuun loppumerkin.) Meidän on siis suoritettava kertolaskut

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 25 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 25 \\ 27 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 23 \end{pmatrix} \text{ ja } \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 23 \\ 27 \end{pmatrix},$$

mikä tapahtuu mukavimmin muodostamalla kerrottavista vektoreista 2×4-matriisin. Saamme

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 25 & 25 & 12 & 23 \\ 11 & 27 & 23 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 25+11 & 3\cdot 25+27 & 3\cdot 12+23 & 3\cdot 23+27 \\ 2\cdot 25+11 & 2\cdot 25+27 & 2\cdot 12+23 & 2\cdot 23+27 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 86 & 102 & 59 & 96 \\ 66 & 77 & 47 & 73 \end{pmatrix},$$

joten kryptatty viesti on ”86 66 102 77 59 47 96 73”.

Esimerkki 2. Dekryptaa (eli tulkitse salakielinen viesti) ”60 46 57 38”, kun avainmatriisi on sama kuin edellä.

Koska

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ ja } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 60 & 57 \\ 46 & 38 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 60-46 & 57-38 \\ -2\cdot 60+3\cdot 46 & -2\cdot 57+3\cdot 38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 19 \\ 18 & 0 \end{pmatrix},$$

niin viesti on ”14 18 19 00” eli ”Osta”.

5 Geometrinen matriisisumma

Palautamme mieleen reaalilukujen *geometrisen summan* kaavan

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{t-1} = \frac{1 - q^t}{1 - q},$$

missä $q \neq 1$. Olemme aiemmin (MT 10, s. 13) todistaneet tämän induktiolla. Vaihtoehtoinen todistustapa (joka sekin tarkkaan ottaen sisältää induktion) on kirjoittaa

$$s_t = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{t-1},$$

jolloin

$$qs_t = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^t .$$

Vähentämällä saamme $s_t - qs_t = 1 - q^t$ eli $(1 - q)s_t = 1 - q^t$, mistä väitös seuraa. Jos $|q| < 1$, niin $\lim_{t\to\infty} q^t = 0$, jolloin saamme *geometrisen sarjan summan kaavan* (MT 10, s. 76)

$$a + aq + aq^2 + \ldots = \frac{a}{1 - q}.$$

Tarkastelemme nyt reaalilukujen summan sijasta matriisisummaa

$$S_t = I + Q + Q^2 + \ldots + Q^{t-1},$$

missä Q on neliömatriisi. Kertomalla vasemmalta Q:lla ja vähentämällä kuten edellä saamme

$$(I - Q)S_t = I - Q^t.$$

Jos $I - Q$ on kääntyvä, voimme jatkaa kuten edellä, jolloin

$$I + Q + Q^2 + \ldots + Q^{t-1} = (I - Q)^{-1}(I - Q^t).$$

Jos lisäksi $\lim_{t\to\infty} Q^t = O$ (alkioittain), saamme

$$I + Q + Q^2 + \ldots = (I - Q)^{-1}.$$

Voidaan todistaa, että $(I - Q)$:n kääntyvyys seuraa ehdosta $\lim_{t\to\infty} Q^t = O$.

Harjoitustehtäviä

44. Ovatko

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

toistensa käänteismatriiseja?

45. Ovatko (a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} -7 & 5 & -9 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ toistensa käänteismatriiseja?

46. Onko annettu matriisi kääntyvä? Määritä myönteisessä tapauksessa käänteismatriisi.

(a) $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 15 & -6 \end{pmatrix}$,

(d) $\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{6} \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix}$, (e) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, (f) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

47. **(a)** Millä a:n arvoilla matriisi $A = \begin{pmatrix} a & 3 \\ 2 & a-5 \end{pmatrix}$ on kääntyvä? **(b)** Mitä on tällöin A^{-1}?

48. Määritä 2×1-matriisi X, jolle

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$.

49. Ratkaise lineaarinen yhtälöpari $x + 2y = 3$, $5x + 9y = 4$ **(a)** tavanomaisesti, **(b)** esittämällä yhtälöpari muodossa $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ja kertomalla vasemmalta matriisilla $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}^{-1}$.

50. Määritä 2×2-matriisi X, jolle **(a)** $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, **(b)** $\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

51. **(a)** Millä ehdolla diagonaalimatriisi on kääntyvä? **(b)** Miten tällöin saadaan sen käänteismatriisi?

52. Olkoot A, B ja C samandimensioisia neliömatriiseja ja olkoon $AB = AC$. **(a)** Todista: Jos A on kääntyvä, niin $B = C$. **(b)** Osoita 2×2-matriisille, että jos A ei ole kääntyvä, niin $B = C$ ei ole välttämättä voimassa. (Näin on yleisestikin.)

53. Olkoon A kääntyvä neliömatriisi. Osoita, että A^T on kääntyvä ja että $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

54. **(a)** Todista: Jos A, B ja C ovat kääntyviä samandimensioisia neliömatriiseja, niin ABC on kääntyvä ja $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$. **(b)** Todista a-kohdan lause n tulontekijälle.

55. Todista:

(a) Jos $ad - bc \neq 0$, niin $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

(b) Jos $ad - bc = 0$, niin $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ei ole kääntyvä.

56. Olkoon $A \in \mathbf{R}^{2\times2}$. Olkoon $B \in \mathbf{R}^{2\times2}$ sellainen, että ehdoista $AB = I$ ja $BA = I$ toinen on voimassa. Osoita, että silloin näistä ehdoista toinenkin on voimassa. (Tämä tulos on voimassa muillekin neliömatriiseille.)

57. Neliömatriisi A on *ortogonaalinen*, jos $A^{-1} = A^T$. Osoita, että jokainen matriisi **(a)** $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$, **(b)** $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, missä θ on annettu reaaliluku, on ortogonaalinen.

58. **(a)** Kryptaa "Vaara" kohdan 4 menetelmällä, mutta käyttämällä avainmatriisia $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

(b) dekryptaa "52 30 32 18 55 34".

59. Dekryptaa seuraavat viestit annetulla avainmatriisilla.

(a) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, viesti: 104 61 74 39.

(b) $\begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$, viesti: 202 119 272 159 351 207.

(c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, viesti: 12 −12 −15 32 4 −2 −32 50.

Tutkimustehtävä: *Ortogonaaliset matriisit*

Onko olemassa muita ortogonaalisia 2×2-matriiseja kuin tehtävässä 57 mainitut?

Tutkimustehtävä: *Salakirjoitus, jatkoa*

Kehitä edellä esitetystä kryptausmenetelmästä vaikeammin murrettava versio jakamalla viesti kahden luvun ryhmien sijasta (i) kolmen luvun ryhmiin, (ii) n luvun ryhmiin, missä n on annettu positiivinen kokonaisluku.

2 LINEAARISET YHTÄLÖRYHMÄT

2.1 Perusasioita

Alkupalat
1 Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisujen lukumäärä
2 Matriisimuoto
3 Porrasmuoto
4 Käänteismatriisi ja lineaarinen yhtälöryhmä
Harjoitustehtäviä
Tutkimustehtävä: Yhtäloparin ratkaisujen lukumäärä

2.2 Gaussin eliminointimenetelmä

Alkupalat
1 Lineaarisen yhtälöryhmän alkeismuunnokset
2 Matriisin alkeismuunnokset
3 Algoritmi porrasmuotoon saattamiseksi
4 Porrasmuotoisen yhtälöryhmän ratkaiseminen
5 Esimerkkejä
Harjoitustehtäviä
Tutkimustehtävä: Alkeismuunnosmatriisit

2.3 Gaussin-Jordanin eliminointimenetelmä

Alkupalat
1 Pelkistetty porrasmuoto
2 Yhtälöryhmän ratkaiseminen Gaussin-Jordanin menetelmällä
3 Matriisin kääntäminen Gaussin-Jordanin menetelmällä
4 Homogeeninen yhtälöryhmä
Harjoitustehtäviä
Tutkimustehtävä: Käyrän sovittaminen
Tutkimustehtävä: Sähköiset virtapiirit

2.4 Leontiefin panos-tuotos-mallit

Alkupalat
1 Suljettu malli
2 Avoin malli
3 Avoimen mallin ratkaisun sarjakehitelmä
Harjoitustehtäviä
Tutkimustehtävä: Matriisin $(I - C)^{-1}$ alkioiden merkitys

2.1 Perusasioita

Alkupalat

1. Määritä sellaiset luvut, joiden summa on 15 ja erotus 6.

2. Mikä on suorien $3x - 2y = 6$ ja $4x + 4y = 8$ leikkauspiste?

1 Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisujen lukumäärä

Lineaarinen yhtälö on muotoa

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

missä *kertoimet* $a_1, a_2, \dots, a_n$ ja *vakiotermi* b ovat annettuja lukuja sekä $x_1, x_2, \dots, x_n$ ovat *tuntemattomia* eli *muuttujia*. *Lineaarinen yhtälöryhmä* koostuu yhdestä tai useammasta lineaarisesta yhtälöstä. Luvut $s_1, s_2, \dots, s_n$ muodostavat tällaisen yhtälöryhmän *ratkaisun*, jos jokainen yhtälö toteutuu, kun $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$. Kaikki ratkaisut muodostavat yhtälöryhmän *ratkaisujoukon*. Voimme käyttää myös sanaa "ratkaisu", vaikka tarkoitamme ratkaisujoukkoa.

Lineaarisella yhtälöryhmällä, jossa on sama määrä yhtälöitä ja tuntemattomia, on tavallisesti täsmälleen yksi ratkaisu. Jos yhtälöitä on vähemmän kuin tuntemattomia, niin ratkaisuja on tavallisesti äärettömän monta, sillä ylimääräisille tuntemattomille voidaan antaa mielivaltaiset arvot. Jos yhtälöitä on enemmän kuin tuntemattomia, niin ratkaisuja ei tavallisesti ole yhtään. On näet harvinainen sattuma, että ylimääräiset yhtälöt tulisivat toteutetuiksi. (Ks. kuitenkin teht. 64.)

Esimerkki 1. Ratkaise lineaarinen yhtälöpari

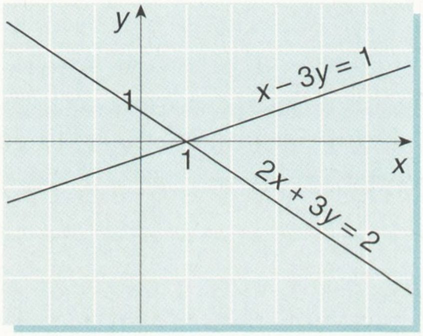
(a) $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 2x + 3y = 2, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 2x - 6y = 2, \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 2x - 6y = 6. \end{cases}$

(a) Laskemalla yhtälöt yhteen saamme $3x = 3$, josta $x = 1$. Sijoittamalla tämän jompaankunpaan yhtälöön saamme $y = 0$. Siis ratkaisu on $x = 1$, $y = 0$. Geometrisesti tämä tarkoittaa, että suorat $x - 3y = 1$ ja $2x + 3y = 2$ leikkaavat toisensa pisteessä $(1,0)$.

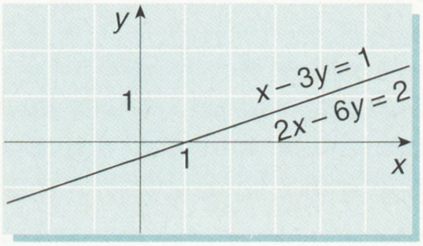
(b) Kertomalla edellisen yhtälön 2:lla saamme $2x - 6y = 2$ eli jälkimmäisen yhtälön. Siis jälkimmäinen yhtälö seuraa edellisestä, joten se voidaan jättää tarpeettomana pois, ja näin yhtälöryhmä on yhtäpitävä yhtälön $x - 3y = 1$ kanssa. Voimme antaa muuttujalle y mielivaltaisen arvon t, jolloin $x = 3t + 1$. Siis ratkaisu on $x = 3t + 1$, $y = t$, missä t on mielivaltainen. Geometrisesti tämä tarkoittaa, että suorat $x - 3y = 1$ ja $2x - 6y = 2$ yhtyvät.

(c) Kertomalla edellisen yhtälön 2:lla saamme $2x - 6y = 2$, joka on ristiriidassa jälkimmäisen yhtälön kanssa. Yhtälöparilla ei täten voi olla ratkaisua. Geometrisesti tämä tarkoittaa, että suorat $x - 3y = 1$ ja $2x - 6y = 6$ ovat yhdensuuntaisia eri suoria.

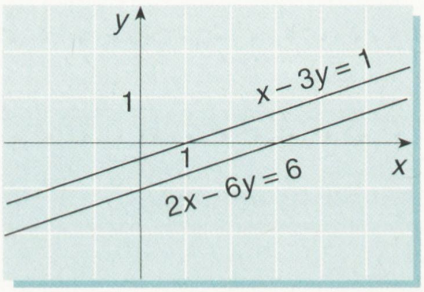
(a)



(b)



(c)



Esimerkki 2. Ratkaise lineaarinen yhtälöryhmä

(a) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 3z = 3, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2x - y = 1 \\ x + 2y = 2. \end{cases}$

(a) Valitsemme mielivaltaisesti $z = t$, jolloin yhtälöryhmä saa muodon

$$\begin{cases} x + y = 1 - t \\ x - y = 3 - 3t. \end{cases}$$

Laskemalla yhtälöt yhteen saamme $2x = 4 - 4t$, josta $x = 2 - 2t$. Vähentämällä yhtälöt saamme $2y = -2 + 2t$, josta $y = -1 + t$. Ratkaisu on siis $x = 2 - 2t$, $y = -1 + t$, $z = t$.

(b) Kahden ensimmäisen yhtälön muodostaman ryhmän ratkaisu $x = 1$, $y = 1$ ei toteuta kolmatta yhtälöä. Siis yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

2 Matriisimuoto

Tarkastelemme yleistä lineaarista yhtälöryhmää

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

jossa on m yhtälöä ja n tuntematonta. Usein jätämme sanan "lineaarinen" pois. Tämän yhtälöryhmän *kerroinmatriisi* on

$$A = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \ldots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

muuttujavektori on

$$X = (x_i) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ja *vakiotermivektori* on

$$B = (b_i) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Näitä käyttämällä saamme yhtälöryhmän *matriisimuotoon*

$$AX = B.$$

Jos $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$ eli jos B on nollavektori, niin kyseessä on lineaarinen *homogeeninen* yhtälöryhmä; muulloin tämä yhtälöryhmä on *epähomogeeninen*.

Matriisi

$$(A\ B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ & & \ldots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

on tämän yhtälöryhmän *täydennetty kerroinmatriisi*. Siis täydennetty kerroinmatriisi saadaan lisäämällä kerroinmatriisiin uudeksi pystyriviksi vakiotermivektori.

Esimerkki. Yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x + 8y + 3z = 2 \\ x + 3y + 2z = 5 \\ 2x + 7y + 4z = 8 \end{cases}$$

on epähomogeeninen. Se voidaan esittää kerroinmatriisin, muuttujavektorin ja vakiotermivektorin avulla muodossa

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Tämän yhtälöryhmän täydennetty kerroinmatriisi on

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 7 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

3 Porrasmuoto

Porrasmuotoisessa lineaarisessa yhtälöryhmässä jokaisen yhtälön ensimmäinen sellainen muuttuja, jonka kerroin $\neq 0$, on järjestysnumeroltaan pienempi kuin seuraavan yhtälön vastaava muuttuja. (Muuttujien x, y, z ja u järjestysnumerot ovat 1, 2, 3 ja 4.) *Porrasmuotoisen matriisin* jokaisen vaakarivin ensimmäisen 0:sta eroavan alkion pystyrivi-indeksi on pienempi kuin seuraavan vaakarivin vastaavan alkion. Porrasmuotoisen lineaarisen yhtälöryhmän täydennetty kerroinmatriisi on porrasmuotoinen matriisi.

Esimerkki 1. Yhtälöryhmät

(a) $\begin{cases} x - 3y = 5 \\ \quad\ 2y = 4, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + 2y - z = 7 \\ \qquad\quad 3z = 18, \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x + 3y - 2z = \ \ 4 \\ \quad\ \ 2y + 5z = \ \ 2 \\ \qquad\quad -z = -2 \end{cases}$

ovat porrasmuotoisia. Kohdan (c) yhtälöryhmän kerroimatriisina ja täydennettynä kerroinmatriisina ovat porrasmuotoiset matriisit

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ ja } \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ratkaisemme nämä yhtälöryhmät *takaisinsijoituksella*.

(a) Jälkimmäisen yhtälön perusteella $y = 2$. Sijoittamalla tämän edelliseen yhtälöön saamme $x - 6 = 5$, josta $x = 11$. Ratkaisu on siis $x = 11$, $y = 2$. Voimme ilmoittaa tämän ratkaisun myös vektorimuodossa

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Sijoitamme jälkimmäisestä yhtälöstä saadun $z = 6$ edelliseen, joka tulee muotoon $x + 2y - 6 = 7$ eli $x = 13 - 2y$. Voimme nyt antaa y:lle mielivaltaisen arvon t, jolloin $x = 13 - 2t$. Yhtälöparilla on siis äärettömän monta ratkaisua $x = 13 - 2t$, $y = t$, $z = 6$, missä t on mielivaltainen reaaliluku. Vektorimuodossa ratkaisu on

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Kolmannen yhtälön perusteella $z = 2$. Sijoittamalla tämän toiseen yhtälöön saamme $2y + 10 = 2$, josta $y = -4$. Sijoittamalla ensimmäiseen yhtälöön $y = -4$ ja $z = 2$ saamme $x - 12 - 4 = 4$, josta $x = 20$. Ratkaisu on siis $x = 20$, $y = -4$, $z = 2$ eli vektorimuodossa

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

4 Käänteismatriisi ja lineaarinen yhtälöryhmä

Olemme aiemmin (s. 39) huomanneet (tapauksessa $n = 2$), että $n \times n$-matriisin kääntäminen voidaan palauttaa n lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisemiseen.

Käänteisesti lineaarisen yhtälöryhmän ratkaiseminen voidaan palauttaa matriisin kääntämiseen, jos yhtälöitä ja tuntemattomia on yhtä monta ja kerroinmatriisi on kääntyvä. Sellaisen lineaarisen yhtälöryhmän, jossa on n yhtälöä ja n tuntematonta, voimme kirjoittaa vektoriyhtälönä $AX = B$, missä A on tunnettu $n \times n$-matriisi, X tuntematon n-alkioinen pystyvektori ja B tunnettu n-alkioinen pystyvektori. Jos A on kääntyvä, niin kertomalla vasemmalta A^{-1}:llä saamme $X = A^{-1}B$. Toisin sanoen: Jos $AX = B$, niin $X = A^{-1}B$. Tulos on voimassa myös kääntäen. Jos näet $X = A^{-1}B$, niin $AX = A(A^{-1}B) = AA^{-1}B = IB = B$.

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B \qquad (A \text{ kääntyvä})$$

Tämän tuloksen merkitys lineaariyhtälöryhmän ratkaisemisessa on enemmän teoreettinen kuin käytännöllinen, sillä on olemassa nopeampia menetelmiä kuin käänteismatriisin käyttö. Jos kuitenkin on ratkaistava useita sellaisia yhtälöryhmiä, joilla on sama kerroinmatriisi, niin kannattaa käyttää käänteismatriisia, koska se tarvitsee laskea vain kerran.

Harjoitustehtäviä

60. Ratkaise yhtälöpari

(a) $\begin{cases} 7x - 3y = 20 \\ -5x - 8y = 6, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ -4x + 6y = 2, \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 9x - 6y = -21 \\ -3x + 2y = 7. \end{cases}$

61. Millä *a*:n arvoilla yhtälöparilla

(a) $\begin{cases} x + y = a \\ 2x + ay = 4, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x + 2y = a \\ 3x + 6y = 5 \end{cases}$

on ratkaisuja (i) täsmälleen yksi, (ii) ei yhtään, (iii) äärettömän monta?

62. Millä *a*:n ja *b*:n arvoilla yhtälöparilla

(a) $\begin{cases} 2x - y = a \\ -4x + 2y = b, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} ax + 4y = b \\ x + ay = 1 \end{cases}$

on ratkaisuja (i) täsmälleen yksi, (ii) ei yhtään, (iii) äärettömän monta?

63. Ratkaise yhtälöryhmä

(a) $\begin{cases} 2x + 3y + z = -1 \\ 3x + 4y + z = 1 \\ 2x + 4y + z = -2, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ -x + y - 2z = 6, \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x - 3y = 4 \\ 2x - y = 3 \\ 5x + y = 12. \end{cases}$

64. Mainitse sellainen lineaarinen yhtälöryhmä, jossa on **(a)** yhtälöitä vähemmän kuin tuntemattomia, mutta jolla ei kuitenkaan ole ratkaisua, **(b)** yhtälöitä enemmän kuin tuntemattomia, mutta jolla kuitenkin on ratkaisu.

65. Muodosta yhtälöryhmän

(a) $\begin{cases} 3x - y + 2z = 4 \\ \phantom{3x - {}} y + 3z = 2 \\ 4x \phantom{{}- y} - z = 7, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + 2z = 4 \\ y + 3z = 2 \\ -x - z = 7 \end{cases}$

(i) kerroinmatriisi, (ii) täydennetty kerroinmatriisi.

66. Muodosta yhtälöryhmä, jonka täydennetty kerroinmatriisi on

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ -3 & 2 & 7 & 8 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

67. Onko $\begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$ yhtälöryhmän

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 23 \\ -35 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

ratkaisu?

68. Kirjoita tehtävässä 67 annetut matriisimuotoiset yhtälöryhmät tavanomaisessa muodossa.

69. Esitä matriisimuodossa yhtälöryhmä

(a) $\begin{cases} -3x + 4y = 6 \\ x + 3y = -1, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 2x + y - 2z = 13 \\ -3x - y + z = 8, \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x \phantom{{}- y} - z = 0 \\ \phantom{2x - {}} y + 2z = 0. \end{cases}$

70. Ratkaise takaisinsijoituksella porrasmuotoinen yhtälöryhmä

(a) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ \phantom{x + {}} y + 3z = 6 \\ \phantom{x + y + {}} 2z = 2, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x - 2y + 4z = 9 \\ \phantom{x - {}} y - 5z = 2. \end{cases}$

71. Ratkaise takaisinsijoituksella porrasmuotoinen yhtälöryhmä

(a) $\begin{cases} x + y - 2z + u = 9 \\ \phantom{x + {}} y - z + 2u = 1 \\ \phantom{x + y - 2{}} z - 3u = 5, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x - 2y + 5z - 3u = 3 \\ \phantom{x - 2{}} y - 3z + 2u = 3 \\ \phantom{x - 2y + 5z - 3{}} u = -4. \end{cases}$

72. Ratkaise takaisinsijoituksella se porrasmuotoinen yhtälöryhmä, jonka täydennetty kerroinmatriisi on

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1 & -10 & 3 & 13 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$.

73. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = n^2 \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 + x_3 + \ldots + x_n = (n-1)^2 \\ \ldots \\ \phantom{x_1 + x_2 + x_3 + {}} x_{n-1} + x_n = 4 \\ \phantom{x_1 + x_2 + x_3 + x_{n-1} + {}} x_n = 1. \end{cases}$$

74. Kuinka kaukana kolmion kärjistä kolmion sisään piirretty ympyrä sivuaa kolmion sivuja, kun sivujen pituudet ovat a, b ja c?

75. Tehdas valmistaa kemiallisia tuotteita A, B ja C koneilla X ja Y. Yhden yksikön valmistamiseksi tuotetta A tarvitaan konetta X 2 tuntia ja konetta Y 2 tuntia. Tuotteelle B nämä tuntimäärät ovat 3 ja 2 sekä tuotteelle C 4 ja 3. Konetta X voidaan käyttää 80 tuntia viikossa ja konetta Y 60 tuntia. Kuinka paljon on kutakin tuotetta valmistettava viikossa, jotta molemmat koneet olisivat täydellisesti käytössä?

Tutkimustehtävä: *Yhtälöparin ratkaisujen lukumäärä*

Esitä vakioita a, b, c, d, e ja f koskeva välttämätön ja riittävä ehto sille, että yhtälöparilla

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

on ratkaisuja **(a)** täsmälleen yksi, **(b)** ei yhtään, **(c)** äärettömän monta.

2.2 Gaussin eliminointimenetelmä

Alkupalat

1. Miksi yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2z = 4 \\ 2y + 3z = 6 \\ x + 3y + 4z = 7 \end{cases}$$

ei ole porrasmuotoinen?

2. Jatkoa. Muodosta ja ratkaise tämän yhtälöryhmän kanssa yhtäpitävä porrasmuotoinen yhtälöryhmä.

1 Lineaarisen yhtälöryhmän alkeismuunnokset

Lineaarisen yhtälöryhmän alkeismuunnokset ovat

Vaihto. Kahden yhtälön paikka vaihdetaan.
Skaalaus. Yksi yhtälö kerrotaan nollasta eroavalla vakiolla.
Korvaus. Yhteen yhtälöön lisätään toinen yhtälö vakiolla kerrottuna.

Kun yhtälöryhmälle tehdään alkeismuunnos, niin saadaan yhtäpitävä yhtälöryhmä eli ratkaisut säilyvät samoina.

Lineaarinen yhtälöryhmä ratkaistaan *Gaussin eliminointimenetelmällä* siten, että ensin muodostetaan alkeismuunnoksilla sen kanssa yhtäpitävä porrasmuotoinen yhtälöryhmä ja sitten ratkaistaan saatu yhtälöryhmä takaisinsijoituksella. Tarkastelemme tätä menetelmää. Käytämme esimerkkinä yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 5 \\ 3x + 2y + 7z = 3 \\ 2x - y + z = -4. \end{cases}$$

1. Muuntaminen porrasmuotoon

1.1. Eliminoidaan x toisesta yhtälöstä ensimmäisen yhtälön avulla

Lisäämme toiseen yhtälöön ensimmäisen (–3):lla kerrottuna.

(–3) kertaa ensimmäinen yhtälö	$-3x - 9y - 12z = -15$
toinen yhtälö	$3x + 2y + 7z = 3$
uusi toinen yhtälö	$-7y - 5z = -12$

Näin saamme yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 5 \\ \quad - 7y - 5z = -12 \\ 2x - y + z = -4. \end{cases}$$

1.2. Eliminoidaan x kolmannesta yhtälöstä ensimmäisen yhtälön avulla

Vastaavasti lisäämme kolmanteen yhtälöön ensimmäisen yhtälön (–2):lla kerrottuna. Tällöin kolmas yhtälö muuttuu muotoon $-7y - 7z = -14$, joten yhtälöryhmäksi tulee

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 5 \\ \quad - 7y - 5z = -12 \\ \quad - 7y - 7z = -14. \end{cases}$$

1.3. Eliminoidaan y kolmannesta yhtälöstä toisen yhtälön avulla

Lisäämällä kolmanteen yhtälöön toisen yhtälön (–1):llä kerrottuna saamme $-2z = -2$. Meillä on nyt porrasmuotoinen yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 5 \\ \quad - 7y - 5z = -12 \\ \qquad\quad - 2z = -2. \end{cases}$$

2. Ratkaistaan porrasmuotoinen yhtälöryhmä takaisinsijoituksella

Sijoittamalla kolmannen yhtälön ratkaisun $z = 1$ toiseen yhtälöön saamme $-7y - 5 = -12$, josta $y = 1$. Kun sijoitamme $y = 1$ ja $z = 1$ ensimmäiseen yhtälöön, se tulee muotoon $x + 3 + 4 = 5$, joten $x = -2$. Siis ratkaisu on $x = -2$, $y = 1$, $z = 1$.

2 Matriisin alkeismuunnokset

Tutkimalla täydennetyn kerroinmatriisin muuttumista lineaarisen yhtälöryhmän alkeismuunnoksissa saamme aiheen määritellä *matriisin alkeismuunnokset* (täsmällisemmin: *vaakarivialkeismuunnokset*) seuraavasti.

Vaihto. Kaksi vaakariviä vaihdetaan.
Skaalaus. Yksi vaakarivi kerrotaan nollasta eroavalla vakiolla.
Korvaus. Yhteen vaakariviin lisätään toinen vaakarivi vakiolla kerrottuna.

Eliminointi on tulkittavissa siten, että ensin suoritetaan sopiva skaalaus ja sitten korvaus. Vaihtoa voidaan tarvita saatettaessa yhtälöryhmää porrasmuotoon.

Merkitsemme $A \sim B$ (lue: "A on ekvivalentti B:n kanssa" tai "A mato B") tarkoittamaan sitä, että B saadaan A:sta yhdellä tai useammalla alkeismuunnoksella. Tällöin myös A saadaan B:stä alkeismuunnoksilla (teht. 80). Käytämme matriisin alkeismuunnoksille seuraavia havainnollisia merkintöjä:

$$\text{vaihto} \qquad \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

$$\text{skaalaus} \qquad \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}^{s} \sim \begin{pmatrix} sa & sb & sc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

$$\text{korvaus} \qquad \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}^{s} \sim \begin{pmatrix} a & b & c \\ d+sa & e+sb & f+sc \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

Esimerkki. Ratkaisimme edellä yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 5 \\ 3x + 2y + 7z = 3 \\ 2x - y + z = -4 \end{cases}$$

Gaussin eliminointimenetelmällä. Suoritamme uudelleen ensimmäisen vaiheen käyttämällä täydennetyn kerroinmatriisin alkeismuunnoksia.

Saamme

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 7 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}^{-3} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -7 & -5 & -12 \\ 2 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}^{-2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -7 & -5 & -12 \\ 0 & -7 & -7 & -14 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -7 & -5 & -12 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Tulos on kohdassa 1 saamamme porrasmuotoisen yhtälöryhmän täydennetty kerroinmatriisi.

3 Algoritmi porrasmuotoon saattamiseksi

Laadimme matriisin porrasmuotoon saattamiseksi systemaattisen menetelmän, *algoritmin*, joka on ohjelmoitavissa tietokoneelle. Käytämme esimerkkinä matriisia

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ 1 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & 10 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Vaihe 1.1. Etsitään ensimmäinen sellainen pystyrivi, jonka kaikki alkiot eivät ole = 0, eli ensimmäinen *porraspystyrivi*.

Esimerkissämme se on 1. pystyrivi.

Vaihe 1.2. Järjestetään (tarvittaessa vaihtamalla vaakarivejä) porraspystyrivin ylin alkio (eli ensimmäinen *porrasalkio*) nollasta eroavaksi.

Vaihtamalla 1. ja 2. vaakarivin saamme

$$A_1 = \begin{pmatrix} \textcircled{1} & -2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ 3 & -6 & 10 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Vaihe 1.3. Hävitetään (eli järjestetään nolliksi) kaikki porrasalkion alapuoliset porraspystyrivin alkiot (käyttämällä sopivia korvauksia).

Lisäämme matriisin A_1 kolmanteen vaakariviin ensimmäisen vaakarivin (–3):lla kerrottuna, jolloin tulos on

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vaihe 2. Ensimmäinen vaakarivi on nyt lopullisessa muodossa. Jatketaan soveltamalla samaa menetelmää ensimmäisen vaakarivin alapuoliseen osaan.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vaihe 2.1. Etsitään jäljellä olevan osan ensimmäinen porraspystyrivi.

Se on 3. pystyrivi

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \textcircled{3} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vaihe 2.2. Järjestetään porraspystyrivin ylin alkio nollasta eroavaksi.

Ei tarvita lisätoimenpiteitä. Porrasalkio = 2.

Vaihe 2.3. Hävitetään porrasalkion alapuoliset alkiot.

Voisimme kertoa 2. vaakarivin $-\frac{1}{2}$:lla ja lisätä sen kolmanteen. Kuitenkin vältymme jakolaskulta jatkamalla

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} 2 \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \overset{-1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

tai

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 8 \end{pmatrix} \overset{-2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Vaihe 3. Jatketaan vastaavasti tai todetaan tehtävä suoritetuksi. Olemme saaneet porrasmuotoisen matriisin

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \text{ tai vaihtoehtoisesti } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tehtävämme on siis suoritettu.

Porrasmuoto ei ole yksikäsitteinen, vaan sama matriisi voidaan muuntaa erilaisiin porrasmuotoihin käyttämällä alkeismuunnoksia eri tavoilla. *Porraspystyrivien lukumäärä ja sijainti ovat kuitenkin aina samat.* Esimerkkimme kummassakin porrasmatriisissa porraspystyriveinä ovat 1. 3. ja 4. pystyrivit.

Matriisin *aste* on porraspystyrivien lukumäärä. Käytämme matriisin A asteelle merkintää rank A.

Esimerkki. (a) Matriisin $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ aste = 3.

(b) Matriisille $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ on rank A = 2.

4 Porrasmuotoisen yhtälöryhmän ratkaiseminen

Esimerkki 1. Ratkaise se lineaarinen yhtälöryhmä, jonka täydennetty kerroinmatriisi on

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Yhtälöryhmät ovat

(a) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 9 \\ \quad\;\; y + \;\; z = 4 \\ \qquad\quad\;\; 0 = 1, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 9 \\ \quad\;\; y + \;\; z = 4 \\ \qquad\quad\;\; 0 = 0. \end{cases}$

(a) Kolmas yhtälö $0 = 1$ on identtisesti epätosi, joten yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua. Voimme myös sanoa, että *ratkaisua ei ole olemassa, koska porrasmuotoisen täydennetyn kerroinmatriisin viimeinen pystyrivi on porraspystyrivi*. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että täydennetyn kerroinmatriisin aste (= 3) on suurempi kuin kerroinmatriisin aste (= 2). Voimme siis myös sanoa, että *ratkaisua ei ole olemassa, koska täydennetyn kerroinmatriisin aste on suurempi kuin kerroinmatriisin aste*.

(b) Voimme jättää kolmannen yhtälön $0 = 0$ kirjoittamatta. Porraspystyrivejä vastaavat muuttujat ovat *päämuuttujia*. Mahdolliset muut muuttujat ovat *vapaita muuttujia*. Siis x ja y ovat päämuuttujia sekä z on vapaa muuttuja.

Toisen yhtälön mukaan $y = 4 - z$. Sijoittamalla tämän ensimmäiseen yhtälöön saamme $x + 8 - 2z - 3z = 9$ eli $x = 1 + 5z$. Yhtälöryhmän *yleinen ratkaisu* on siis $x = 1 + 5t$, $y = 4 - t$, $z = t$, missä *parametri* t on mielivaltainen reaaliluku. Vektorimuodossa tämä ratkaisu on

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Jos meitä kiinnostaa vain ratkaisun olemassaolo, niin voimme suoraan sanoa, että *ratkaisu on olemassa, koska porrasmuotoisen täydennetyn kerroinmatriisin viimeinen pystyrivi ei ole porraspystyrivi*. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että täydennetyn kerroinmatriisin aste on sama kuin kerroinmatriisin aste (= 2). Voimme siis myös sanoa, että *ratkaisu on olemassa, koska täydennetyn kerroinmatriisin aste on sama kuin kerroinmatriisin aste*.

Jos lineaarisella yhtälöryhmällä on ratkaisu ja jos tällä yhtälöryhmällä on vapaita muuttujia, niin niille voidaan antaa mielivaltaiset arvot, joten ratkaisuja on tällöin äärettömän monta. Jos taas yhtälöryhmällä on ratkaisu ja vapaita muuttujia ei ole, niin ratkaisu on yksikäsitteinen. Tällöin kaikki muuttujat ovat päämuuttujia.

Lineaarisella yhtälöryhmällä $AX = B$, jossa on n tuntematonta, on

ratkaisu, jos ja vain jos $\text{rank } A = \text{rank } (A\ B)$;

yksikäsitteinen ratkaisu, jos ja vain jos $n = \text{rank } A = \text{rank } (A\ B)$;

äärettömän monta ratkaisua, jos ja vain jos $n > \text{rank } A = \text{rank } (A\ B)$.

5 Esimerkkejä

Esimerkki 1. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} \phantom{x - 2y +{}} 2z - u = 8 \\ x - 2y + 3z + 2u = 1 \\ 3x - 6y + 10z + 6u = 5. \end{cases}$$

Vaihe 1. Täydennetty kerroinmatriisi on

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ 1 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & 10 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Vaihe 2. Ekvivalentti porrasmuotoinen matriisi on kohdan 3 esimerkin mukaan

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Koska viimeinen pystyrivi ei ole porraspystyrivi, niin yhtälöryhmällä on ratkaisu.

Vaihe 3. Porrasmuotoinen yhtälöryhmä on

$$\begin{cases} x - 2y + 3z + 2u = 1 \\ z = 2 \\ -u = 4. \end{cases}$$

Vaihe 4. Ratkaisemme päämuuttujien x, z ja u arvot sekä valitsemme vapaan muuttujan y arvon mielivaltaisesti: $y = t$. Toisen ja kolmannen yhtälön mukaan $z = 2$ ja $u = -4$, jotka sijoittamalla ensimmäiseen yhtälöön saamme $x = 3 + 2y$. Siis $x = 3 + 2t$, $y = t$, $z = 2$, $u = -4$ eli vektorimuodossa

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esimerkki 2. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 5 \\ x - 4y - z = -7 \\ 2x - y + 3z = -4. \end{cases}$$

Koska

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -4 & -1 & -7 \\ 2 & -1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \overset{-1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -7 & -5 & -12 \\ 2 & -1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \overset{-2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -7 & -5 & -12 \\ 0 & -7 & -5 & -14 \end{pmatrix} \overset{-1}{}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -7 & -5 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

ja viimeinen pystyrivi on porraspystyrivi, niin yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

Harjoitustehtäviä

76. Millä alkeismuunnoksilla x saadaan eliminoiduksi yhtälöryhmän

(a) $\begin{cases} -x + 3y + z = 0 \\ x + 2y - z = 5 \\ 2x - y + 6z = -11, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + y - 3z = -5 \\ 5x + 6y + 8z = 9 \end{cases}$

(i) toisesta, (ii) kolmannesta yhtälöstä ensimmäisen yhtälön avulla?

77. Muunna porrasmuotoon yhtälöryhmä

(a) $\begin{cases} x + 2y = -5 \\ 2x + 3y = -11, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ -x + 4y - 2z = -8 \\ 2x - y + z = 6. \end{cases}$

78. Määritä rank A, kun A on

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -3 & 12 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -6 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

79. Määritä rank A, kun A on

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 9 & 0 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 5 & 1 & -4 \\ 9 & 7 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & -2 & 8 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 & 11 \end{pmatrix}$.

80. Todista: Jos matriisi B saadaan matriisista A alkeismuunnoksilla, niin myös A saadaan B:stä alkeismuunnoksilla.

81. Kuinka monta ratkaisua on lineaarisella yhtälöryhmällä, jonka täydennetty kerroinmatriisi on

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -4 \\ 5 & -4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & 0 & -8 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$?

82. Ratkaise takaisinsijoituksella yhtälöryhmä, jonka täydennetty kerroinmatriisi on

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 20 \end{pmatrix}$.

83. Ratkaise Gaussin eliminointimenetelmällä yhtälöryhmä

(a) $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = -10 \\ -x + 6y + z = 2 \\ 3x - 5y - z = 0, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 5x - 2y - z = -2 \\ 3x + 3y + 4z = 21 \\ 4x - 4y + 3z = 5. \end{cases}$

84. Ratkaise Gaussin eliminointimenetelmällä yhtälöryhmä

(a) $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y - 4z = -3, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y + 7z = 8 \\ -x + y - 5z = -5. \end{cases}$

85. Ratkaise Gaussin eliminointimenetelmällä yhtälöryhmä

(a) $\begin{cases} 3x + y - 3z = 6 \\ 2x + 7y + z = -9 \\ 2x + 5y = -5, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 3x - 6y - 2z = 1 \\ 2x - 4y + z = 17 \\ x - 2y - 2z = -9. \end{cases}$

86. Ratkaise Gaussin eliminointimenetelmä yhtälöryhmä, jonka täydennetty kerroinmatriisi on

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & 2 & 6 \\ 2 & -2 & -5 & 0 & -10 \\ 4 & 1 & 2 & 1 & 17 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 12 \end{pmatrix}$.

87. Millä vakion a arvoilla yhtälöryhmällä

(a) $\begin{cases} x + 4y = -2 \\ 3x + ay = -6, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x - 3y = a \\ -2x + 6y = -5, \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - y - 3z = 5 \\ 4x + 3y - z = a \end{cases}$

on ratkaisu?

88. Millä a:n ja b:n arvoilla yhtälöryhmällä

(a) $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - y - 3z = 5 \\ 4x + 3y - z = b, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} ax + 2y + z = 3 \\ 2x - y - 3z = 5 \\ 4x + 3y - z = b \end{cases}$

on ratkaisuja (i) täsmälleen yksi, (ii) äärettömän monta, (iii) ei yhtään?

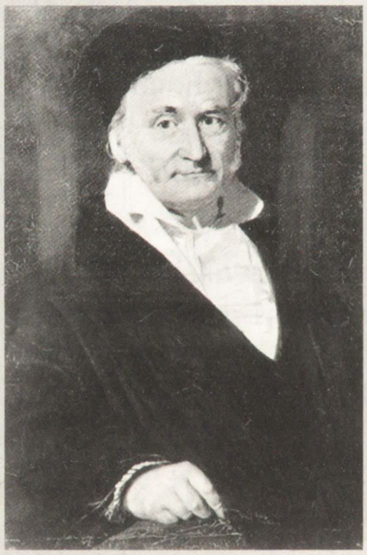
89. Tarkastellaan yhtälöryhmää $AX = B$, jossa on 5 yhtälöä ja 6 tuntematonta. Kun kerroinmatriisi muutetaan porrasmuotoon, niin porraspystyrivien lukumääräksi tulee 4. Samoin käy muutettaessa täydennetty kerroinmatriisi porrasmuotoon.

(a) Mitä on rank A? **(b)** Mitä voidaan sanoa tämän yhtälöryhmän ratkaisujen lukumäärästä?

Tutkimustehtävä: *Alkeismuunnosmatriisit*

Jokainen matriisin $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ alkeismuunnos voidaan tulkita niin, että A kerrotaan vasemmalta sopivalla *alkeismuunnosmatriisilla* $E \in \mathbf{R}^{m \times m}$. Määritä sellainen E, että matriisi EA saadaan matriisista A

(a) vaihtamalla i. ja k. vaakarivi,
(b) kertomalla k. vaakarivi luvulla c ($\neq 0$),
(c) lisäämällä k. vaakariviin i. vaakarivi kerrottuna luvulla c.



Karl Friedrich Gauss
(1777–1855)

2.3 Gaussin-Jordanin eliminointimenetelmä

Alkupalat

1. Mikä on matriisin $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ aste?

2. Jatkoa. Saata tämä matriisi alkeismuunnoksilla sellaiseen muotoon, että lävistäjän ulkopuoliset alkiot = 0.

1 Pelkistetty porrasmuoto

Matriisin porrasmuoto on *pelkistetty*, jos jokainen porrasalkio = 1 ja porraspystyrivien kaikki muut alkiot = 0. Voidaan todistaa, että jokaisella matriisilla on yksikäsitteinen pelkistetty porrasmuoto.

Esimerkki 1. Olemme edellisen luvun kohdassa 3 saattaneet erään matriisin porrasmuotoon

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Jatkamme niin, että matriisi tulee pelkistettyyn porrasmuotoon.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}^{-3} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}^{2} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} -1$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Esimerkki 2. Saata matriisi

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

pelkistettyyn porrasmuotoon.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2 Yhtälöryhmän ratkaiseminen Gaussin-Jordanin menetelmällä

Lineaarinen yhtälöryhmä ratkaistaan *Gaussin-Jordanin eliminointimenetelmällä* niin, että täydennetty kerroinmatriisi saatetaan pelkistettyyn porrasmuotoon. Tällöin yhtälöryhmän ratkaisu on välittömästi nähtävissä, joten takaisinsijoituksia ei tarvita.

Esimerkki 1. Ratkaise Gaussin-Jordanin menetelmällä yhtälöryhmä

$$\begin{cases} \phantom{3x - 6y + {}} 2z - u = 8 \\ x - 2y + 3z + 2u = 1 \\ 3x - 6y + 10z + 6u = 5. \end{cases}$$

Olemme kohdan 1 esimerkissä saattaneet tämän yhtälöryhmän täydennetyn kerroinmatriisin pelkistettyyn porrasmuotoon

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Vastaavan yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ z = 2 \\ u = -4 \end{cases}$$

ratkaisu on $x = 3 + 2t$, $y = t$, $z = 2$, $u = -4$ eli vektorimuodossa

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tulos on sama, jonka saimme aiemmin Gaussin eliminointimenetelmällä. Päämuuttujien arvot tapauksessa $t = 0$ näkyvät suoraan pelkistettyä porrasmuotoa olevan täydennetyn kerroinmatriisin viimeisestä pystyrivistä.

Esimerkki 2. Ratkaise Gaussin-Jordanin eliminointimenetelmällä yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x + 8y + 7z = 20 \\ 2x + 7y + 9z = 23. \end{cases}$$

Muunnamme täydennetyn kerroinmatriisin pelkistettyyn porrasmuotoon

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 7 & 20 \\ 2 & 7 & 9 & 23 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 7 & 9 & 23 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 7 & 15 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vastaavasta yhtälöryhmästä saamme suoraan $x = 5$, $y = -2$, $z = 3$. Vapaita muuttujia ei ole, joten ratkaisuja on täsmälleen yksi.

3 Matriisin kääntäminen Gaussin-Jordanin menetelmällä

Hyvä numeerinen menetelmä matriisin kääntämiseksi saadaan ratkaisemalla vastaavat lineaariset yhtälöryhmät Gaussin-Jordanin menetelmällä.

Esimerkki 1. Käännä matriisi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Merkitsemme $A^{-1} = (X_1\ X_2\ X_3)$ ja $I = (E_1\ E_2\ E_3)$. Siis

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tällöin on oltava (miksi ?)

$$AX_1 = E_1,\ AX_2 = E_2 \text{ ja } AX_3 = E_3.$$

Ratkaisemme nämä yhtälöryhmät. Koska kaikilla on sama kerroinmatriisi, niin voimme käsitellä näitä yhtälöryhmiä samanaikaisesti. Muodostamme täydennetyn kerroinmatriisin, jonka neljäs pystyrivi viittaa ensimmäiseen yhtälöryhmään, viides toiseen ja kuudes kolmanteen. Toisin sanoen kirjoitamme peräkkäin matriisit A ja I. Saatamme tämän matriisin pelkistettyyn porrasmuotoon

$$(A\ \ I) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 11 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 11 & -5 \end{pmatrix}.$$

Neljä ensimmäistä pystyriviä muodostavat yhtälöryhmän $AX_1 = E_1$ täydennetyn kerroinmatriisin pelkistetyssä porrasmuodossa. Siis

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ottamalla mukaan kolme ensimmäistä pystyriviä ja viidennen saamme

$$X_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix},$$

ja vastaavasti ottamalla kolme ensimmäistä ja kuudennen

$$X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Siis

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 4 & 11 & -5 \end{pmatrix}$$

eli tulosmatriisin kolmen viimeisen pystyrivin muodostama matriisi.

4 Homogeeninen yhtälöryhmä

Tarkastelemme lineaarista homogeenista yhtälöryhmää

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

jonka kerroinmatriisi ja täydennetty kerroinmatriisi ovat

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (A \;\; O) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0 \\ \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & 0 \end{pmatrix}.$$

Tällä yhtälöryhmällä on aina *triviaali ratkaisu* $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Tulos sopii yhteen sen kanssa, että rank A = rank (A O), mikä takaa, että yhtälöryhmällä on aina ratkaisu (s. 63). Jos n = rank A, niin tällä yhtälöryhmällä on vain triviaali ratkaisu. Jos taas $n >$ rank A, niin ratkaisuja on äärettömän monta.

Esimerkki 1. Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 5x - 8y - z = 0. \end{cases}$$

(a) Määritä rank A ja sen perusteella yhtälöryhmän ratkaisujen lukumäärä.
(b) Ratkaise yhtälöryhmä käyttämättä a-kohdan tulosta hyväksi.

(a) Kerroinmatriisi on

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -8 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 5 & -8 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Koska rank A = tuntemattomien lukumäärä (= 3), niin yhtälöryhmällä on vain triviaali ratkaisu.

(b)
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

joten $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Esimerkki 2. Kuten edellä, mutta tarkastellaan yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 5x - 8y + 7z = 0. \end{cases}$$

(a) Kerroinmatriisin porrasmuoto on nyt

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Siis rank A = 2 < 3, joten yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua.

(b) Koska

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{-1} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{1} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

niin yhtälöryhmä on pelkistetyssä porrasmuodossa $x + 3z = 0$, $y + z = 0$. Valitsemalla mielivaltaisesti $z = t$ saamme $x = -3t$, $y = -t$, $z = t$.

Harjoitustehtäviä

90. Saata pelkistettyyn porrasmuotoon matriisi

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

91. Saata pelkistettyyn porrasmuotoon matriisi

(a) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -5 \\ 9 & 4 & -7 \\ 4 & 1 & -7 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & -4 & 3 \\ 2 & 7 & 19 & -3 \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & -1 & -8 \\ -3 & 1 & -8 & 1 \end{pmatrix}$.

92. Ratkaise Gaussin-Jordanin menetelmällä yhtälöryhmä

(a) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ y + 3z = 6 \\ 2z = 2, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + 2y - 7z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ 2x + y + 5z = 0. \end{cases}$

93. Ratkaise Gaussin-Jordanin menetelmällä yhtälöryhmä

(a) $\begin{cases} x + y + z + u = 6 \\ 3x + y + 2u = 6 \\ 2x + y - z = 3, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + y - z + u = 3 \\ 2x - y - z + 2u = 4 \\ -3y + z = -2 \\ -3x + 3y + z - 3u = -5. \end{cases}$

94. Millä vakion a arvoilla yhtälöryhmällä

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x + 2y + z = 3 \\ x + y + (a^2 - 5)z = a \end{cases}$$

on ratkaisuja **(a)** täsmälleen yksi, **(b)** ei yhtään, **(c)** äärettömän monta?

95. Olkoon $A \in \mathbf{R}^{5\times 6}$ ja rank $A = 4$. Millainen on matriisin A pelkistetty porrasmuoto?

96. **(a)** Johda Gaussin-Jordanin menetelmällä yleisen 2×2-matriisin käänteismatriisin kaava (s. 39)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

kun $ad - bc \neq 0$. **(b)** Mitä tapahtuu, jos tätä menetelmää yritetään käyttää tapauksessa $ad - bc = 0$?

97. Määritä Gaussin-Jordanin menetelmällä matriisin

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, **(b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, **(c)** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$,

(d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ käänteismatriisi, mikäli se on olemassa.

98. Määritä Gaussin-Jordanin menetelmällä matriisin

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, **(b)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 9 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, **(c)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 16 & 4 & 1 & -1 \\ 9 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

käänteismatriisi, mikäli se on olemassa.

99. Millä a:n arvoilla matriisi $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ on kääntyvä?

100. Määritä sellainen matriisi X, että $AX = B$, kun

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 8 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

(b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 6 \\ 7 & 4 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

101. Ratkaise yhtälöryhmä

(a) $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ -x + 2y = 0, \end{cases}$ **(b)** $\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2x - 4y = 0, \end{cases}$ **(c)** $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - y = 0 \\ 3x + 2y = 0. \end{cases}$

102. Ratkaise yhtälöryhmä

(a) $\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 3x - 2y + z = 0, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + 2y - 7z = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ 2x + y + 5z = 0, \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x + 2y + 5z = 0 \\ 3x - 4y + 4z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0. \end{cases}$

103. Ratkaise yhtälöryhmä

(a) $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \\ -x + y + 3z = 0 \\ 4x - y + 5z = 0, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 8x + 3y - 3z = 0 \\ -6x - 3y + 3z = 0 \\ 5x + 2y - 2z = 0 \\ 3x + y - z = 0, \end{cases}$

(c) $\begin{cases} -x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ -z + u = 0 \\ x + u = 0. \end{cases}$

Tutkimustehtävä: *Käyrän sovittaminen*

Tämä ja seuraava tutkimustehtävä eivät liity suoranaisesti Gaussin-Jordanin menetelmään, vaan lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisemiseen yleensä.

(a) Määritä mahdollisimman alhaista astetta oleva polynomi, jonka kuvaaja kulkee pisteiden (1, 2), (2, 4) ja (3, 7) kautta. (Yleisempi tarkastelu, ks. MT 12.)
Ohjeita: Etsi polynomia, jonka aste on korkeintaan 2. Merkitse sitä $f(x) = a + bx + cx^2$. Ehdoista $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 7$ saat kertoimille a, b ja c lineaarisen yhtälöryhmän.

(b) Tutki yleisesti kysymystä sellaisen mahdollisimman alhaista astetta olevan polynomin määrittämisestä, jonka kuvaaja kulkee kolmen annetun pisteen kautta.

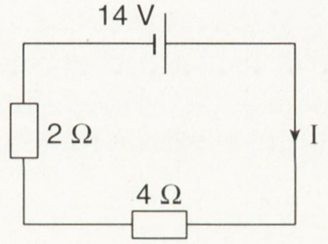
(c) Määritä pisteiden (–1, 5), (5, –3) ja (6, 4) kautta kulkevan ympyrän keskipiste ja säde.
Ohjeita: Ympyrän yhtälö on keskipistemuodossa $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ ja yleisessä muodossa $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, ks. MT 5. Vaatimalla, että ympyrä kulkee mainittujen pisteiden kautta, saat kertoimille a, b, c lineaarisen yhtälöryhmän. Näin saat yhtälön yleisessä muodossa. Palauta se keskipistemuotoon neliöksi täydentämällä.

(d) Tutki yleisesti kysymystä sellaisen ympyrän yhtälön määrittämisestä, joka kulkee kolmen annetun pisteen kautta.

Tutkimustehtävä: *Sähköiset virtapiirit*

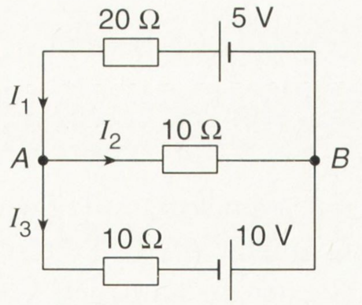
Tarkastelemme sellaisia piirejä, joissa on vain akkuja ja vastuksia. Ohmin lain mukaan vastuksen R aiheuttama jännitehäviö $U = RI$, kun virranvoimakkuus = I. Johtimien yhtymäkohtaan eli solmuun tulevien ja lähtevien virtojen voimakkuuksien summat ovat Kirchhoffin ensimmäisen lain mukaan yhtäsuuret. Suljetun piirin jännitehäviöiden summa on Kirchhoffin toisen lain mukaan yhtäsuuri kuin akkujännitteiden summa (samaan suuntaan laskettuna).

(a) Määritä kuvion piirin virranvoimakkuus I. Ohje: Sovella Kirchhoffin toista lakia, jolloin saat yhtälön I:lle.



(b) Määritä kuvion verkoston virranvoimakkuudet I_1, I_2 ja I_3.

Ohje: Sovella Kirchhoffin ensimmäistä lakia solmussa A (tai B), toista lakia ylemmässä piirissä ja toista lakia alemmassa piirissä. Tällöin saat kysytyille virranvoimakkuuksille yhtälöryhmän.



2.4 Leontiefin panos-tuotos-mallit

Alkupalat

1. Olkoon A sellainen kääntyvä neliömatriisi, jonka kaikki alkiot ovat positiivisia. Onko mahdollista, että käänteismatriisissa A^{-1} ei ole yhtään negatiivista alkiota?

2. Neliömatriisin A kaikki vaakarivisummat = 1. Olkoon X vastaavandimensioinen (pysty)vektori, jonka kaikki alkiot = 1. Osoita, että $AX = X$.

1 Suljettu malli

Yhdysvaltalainen Wassily Leontief sai taloustieteiden Nobelin palkinnon 1973. Hänen tutkimuksensa ovat aloittaneet uuden aikakauden matematiikan soveltamisessa taloustieteisiin. Niiden eräänä perustana ovat yksinkertaiset *panos-tuotos-mallit*, joita tarkastelemme esimerkkien avulla.

Kuvitelkaamme, että erään talousalueen elinkeinorakenne muodostuu maataloudesta (M), teollisuudesta (T) ja palveluista (P). Nämä alat käyttävät hyväkseen toistensa tuotantoa seuraavan taulukon mukaan.

	Panos		
Tuotos	M	T	P
M	0,2	0,1	0,6
T	0,4	0,5	0,1
P	0,4	0,4	0,3

Pystyriveistä näkyy, millä tavalla alojen tuotanto jakautuu. Esimerkiksi ensimmäinen pystyrivi kertoo, että maatalouden tuottamasta 1 yksiköstä 0,2 menee maatalouden, 0,4 teollisuuden ja 0,4 palvelujen käyttöön. Kaikki pystyrivisummat = 1, joten talousalue on eristetty sikäli, että tuotantoa ei myydä muualle. Vaakariveistä näkyy, kuinka monta yksik-

köä asianomaista tuotantoa tarvitaan eri tuotantoaloilla yksikköä kohti. Esimerkiksi toinen vaakarivi kertoo, että teollisuuden tuotantoa tarvitaan maataloudessa yhden yksikön tuottamiseksi 0,4 yksikköä, teollisuudessa 0,5 yksikköä ja palveluissa 0,1 yksikköä.

Siis *vaihtomatriisin*

$$E = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,6 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,4 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}$$

kaikki pystyrivisummat = 1, pystyrivit ilmoittavat tuotannon tarjonnan jakauman ja vaakarivit tuotannon kysynnän yhden yksikön tuottamiseksi. Voimme myös sanoa, että pystyrivit ilmoittavat *panosten* suhteelliset osuudet ja että vaakarivit ilmoittavat ne *tuotokset*, jotka tarvitaan eri tuotantoaloilla yksikköä kohti. Kysymme, miten näiden alojen tuotanto on tiettynä aikana järjestettävä, jotta kysyntä ja tarjonta olisivat tasapainossa.

Olkoot nämä tuotannot m, t ja p yksikköä. Katsomme asiaa aluksi maatalouden kannalta. Sen tuotannon m täytyy kattaa resurssitarve

M:n tarvitsema M:n tuotanto + T:n tarvitsema M:n tuotanto + P:n tarvitsema M:n tuotanto = $0{,}2m + 0{,}1t + 0{,}6p$.

On siis oltava $0{,}2m + 0{,}1t + 0{,}6p = m$. Tutkimalla vastaavasti T:n ja P:n tilannetta saamme yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 0,2m + 0,1t + 0,6p = m \\ 0,4m + 0,5t + 0,1p = t \\ 0,4m + 0,4t + 0,3p = p \end{cases}$$

eli

$$\begin{cases} 0,8m - 0,1t - 0,6p = 0 \\ -0,4m + 0,5t - 0,1p = 0 \\ -0,4m - 0,4t + 0,7p = 0, \end{cases}$$

jonka voimme esittää vaihtomatriisin E ja *tuotantovektorin*

$$X = \begin{pmatrix} m \\ t \\ p \end{pmatrix}$$

avulla myös muodossa

$$EX = X \text{ eli } (I - E)X = 0.$$

Laskemalla yhteen yhtälöryhmän kaksi ensimmäistä yhtälöä ja kertomalla tuloksen (–1):llä saamme kolmannen yhtälön. Täten kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä seuraa kolmas, joka voidaan siis jättää pois. Yhtälöparin

$$\begin{cases} 0,8m - 0,1t - 0,6p = 0 \\ -0,4m + 0,5t - 0,1p = 0 \end{cases}$$

tuntemattomista voimme antaa yhdelle mielivaltaisen arvon ja sitten ratkaista kaksi muuta. Tulokseksi saamme (teht. 104)

$$m = 31s,\ t = 32s,\ p = 36s,$$

missä s on mielivaltainen vakio. Tuotantojen määrien on siis oltava suhteessa 31 : 32 : 36, jotta tasapaino kysynnän ja tarjonnan välillä saavutettaisiin.

Jos matriisin E kaikki alkiot ovat ≥ 0 ja kaikki pystyrivisummat ovat samat, niin voidaan todistaa, että vektoriyhtälöllä (eli skalaariyhtälöryhmällä) $EX = X$ eli $(I - E)X = 0$ on ratkaisu X, jonka kaikki alkiot ovat ≥ 0. Itse asiassa tällaisia ratkaisuja on äärettömän monta, sillä yksi tuntematon voidaan valita mielivaltaisesti.

2 Avoin malli

Muutamme edellistä esimerkkiä seuraavasti.

	Panos		
Tuotos	M	T	P
M	0,5	0,4	0,2
T	0,2	0,3	0,1
P	0,1	0,1	0,3

Nyt kaikki pystyrivisummat < 1. Siis koko tuotantoa ei panostetakaan M:n, T:n ja P:n käyttöön, vaan osa markkinoidaan muualle, nk. *avoimelle sektorille*. Esimerkiksi maataloutta vastaava pystyrivisumma = 0,8,

joten sen tuotannosta avoimelle sektorille jäävä osuus on 0,2. Vastaavasti teollisuudelta jää 0,2 ja palveluilta 0,6. Matriisia

$$C = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}$$

kutsumme nyt *kulutusmatriisiksi*.

Olkoot m, t ja p maatalouden, teollisuuden ja palvelujen tuotannot tiettynä aikana. Tuotantovektorin

$$X = \begin{pmatrix} m \\ t \\ p \end{pmatrix}$$

vaatimat resurssit muodostavat vektorin CX. (Tämä voidaan osoittaa kuten kohdassa 1 vaihtomatriisia tutkiessamme.) Siis avoimelle sektorille jäävä tuotanto muodostaa vektorin

$$X - CX = (I - C)X.$$

Olettakaamme, että markkinoilla tarvitaan samana aikana 5 yksikköä maatalouden, 7 teollisuuden ja 2 palvelujen tuotantoa. Toisin sanoen avoimen sektorin tarpeen ilmoittaa *kysyntävektori*

$$D = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Saamme tällöin vektoriyhtälön

$$(I - C)X = D$$

eli lineaarisen yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 0,5m - 0,4t - 0,2p = 5 \\ -0,2m + 0,7t - 0,1p = 7 \\ -0,1m - 0,1t + 0,7p = 2, \end{cases}$$

jonka ratkaisu on $m = 30$, $t = 20$, $p = 10$. Siis maatalouden on tuotettava 30, teollisuuden 20 ja palvelujen 10 yksikköä, jotta tuotanto olisi tasapainossa markkinoiden kysynnän kanssa.

Yleisesti voidaan todistaa, että jos kulutusmatriisin C kaikki alkiot ovat ≥ 0 ja sen kaikki pystyrivisummat ovat < 1, niin $I - C$ on kääntyvä. Tällöin siis yhtälöllä $(I - C)X = D$ on ratkaisu $X = (I - C)^{-1}D$. Edelleen voidaan todistaa, että vektorin X alkiot ovat ≥ 0. Tuotanto siis pystytään tällöin järjestämään niin, että se on tasapainossa markkinoiden kysynnän kanssa.

3 Avoimen mallin ratkaisun sarjakehitelmä

Tarkastelemme avointa Leontiefin mallia, jonka kulutusmatriisi = C ja kysyntävektori = D. Tuotantovektorin X on tällöin toteutettava yhtälö $(I - C)X = D$. Kuvittelemme, että tuotantoa suunnitellaan seuraavasti. Koska markkinat vaativat D:n, niin ainakin se on tuotettava. (Käytämme sanontaa "tuotetaan vektori" tarkoittamaan sitä, että tuotetaan vektorin alkioiden osoittamat määrät vastaavia tuotteita.) Toisaalta D:n tuottaminen vaatii resursseja CD:n verran, joten on tuotettava lisäksi CD. Mutta CD:n tuottaminen vaatii resursseja $C(CD) = C^2D$ verran, joten on tuotettava sen lisäksi C^2D. Nyt C^2D vaatii ... jne. Vaikuttaa siis siltä, että ratkaisu olisi

$$X = D + CD + C^2D + \dots = (I + C + C^2 + \dots)D.$$

Näin todellakin on. Jos näet C:n kaikki alkiot ovat ≥ 0 ja kaikki pystyrivisummat ovat < 1, niin voidaan osoittaa, että $\lim_{t \to \infty} C^t = O$. Täten $I + C + C^2 + \dots = (I - C)^{-1}$, ks. s. 43, ja siis $(I + C + C^2 + \dots)D = (I - C)^{-1}D$.

Harjoitustehtäviä

104. Ratkaise kohdan 1 esimerkissä saatu yhtälöpari

$$\begin{cases} 0{,}8m - 0{,}1t - 0{,}6p = 0 \\ -0{,}4m + 0{,}5t - 0{,}1p = 0. \end{cases}$$

105. Yritykset *A* ja *B* muodostavat yksinkertaisen talouden. *A*:n tuotannosta puolet menee *B*:n käyttöön ja puolet jää sen omaan käyttöön. *B*:n tuotannosta $\frac{1}{3}$ menee *A*:n käyttöön ja $\frac{2}{3}$ jää sen omaan käyttöön. Millä tuotantomäärien suhteella tämä talous toimii? Käsittele tehtävä **(a)** alkeellisella päättelyllä, **(b)** Leontiefin suljetulla mallilla.

106. Tarkastellaan yksinkertaista taloutta, jonka muodostavat kaivos-, sähkö- ja terästeollisuus. Kaivosteollisuuden tuotteista 60 % menee sähkö- ja 40 % terästeollisuuden käyttöön. Sähköteollisuuden tuotteista 40 % menee kaivos-, 10 % sähkö- ja 50 % terästeollisuuden käyttöön. Terästeollisuuden tuotteista 60 % menee kaivos-, 20 % sähkö- ja 20 % terästeollisuuden käyttöön. Jos kokonaistuotanto on 100 miljoonaa markkaa, niin kuinka suuria (rahallisesti) on näiden alojen tuotantojen oltava, jotta talous toimisi?

107. Miksi kohdan 2 esimerkissä ei voida käyttää kulutusmatriisina kohdan 1 esimerkin vaihtomatriisia?

108. Tarkastellaan yksinkertaista taloutta, jonka muodostavat tavarat ja palvelut tietyillä yksiköillä mitattuina. Yhden tavarayksikön tuottaminen vaatii 0,2 yksikköä tavaroita ja 0,5 yksikköä palveluja. Yhden palveluyksikön tuottaminen vaatii 0,4 yksikköä tavaroita ja 0,3 yksikköä palveluja. Markkinoille tarvitaan 20 yksikköä tavaroita ja 30 yksikköä palveluja. Kuinka paljon tavaroita ja kuinka paljon palveluja on tuotantojakson aikana tuotettava?

109. Tarkastellaan yksinkertaista taloutta, jonka muodostavat teollisuus, maatalous ja palvelut tietyillä yksiköillä mitattuina. Tuoteyksikköä kohti teollisuus tarvitsee 0,5 yksikköä teollisuus-, 0,2 yksikköä maatalous- ja 0,1 yksikköä palvelutuotteita. Maataloudelle vastaavat tarpeet ovat 0,4, 0,3 ja 0,1 yksikköä sekä palve-

luille 0,2, 0,1 ja 0,3 yksikköä. Jos tuotantojakson aikana teollisuustuotteita valmistetaan 226 yksikköä, maataloustuotteita 119 yksikköä ja palvelutuotteita 78 yksikköä, niin millainen markkinoiden kysyntä voidaan silloin tyydyttää?

110. Mitä voidaan sanoa sellaisen Leontiefin avoimen mallin järkevyydestä, jonka kulutusmatriisin alkiot ovat ≥ 0, mutta jokin pystyrivisumma on (tai jotkin pystyrivisummat ovat) > 1?

111. Osoita kokeellisesti, että kohdan 2 matriisille C on

(a) $\lim_{t \to \infty} C^t = O$, (b) $I + C + C^2 + \ldots = (I - C)^{-1}$.

Tutkimustehtävä: *Matriisin $(I–C)^{-1}$ alkioiden merkitys*

(a) Todista: Matriisin $(I - C)^{-1}$ i. vaakarivin ja k. pystyrivin alkio ilmoittaa, kuinka paljon i. tuotetta on valmistettava lisää, jos k. tuotteen kysyntä kasvaa yhdellä yksiköllä.

(b) Tutkiessaan Yhdysvaltojen taloutta Leontief huomasi, että vuoden 1972 kulutusmatriisista C muodostetun matriisin $(I - C)^{-1}$ kaikki alkiot ovat > 0 (eli mikään alkio ei ole $= 0$). Mitä tämä tarkoittaa?

3 VEKTORIAVARUUDET JA LINEAARIKUVAUKSET

3.1 Vektoriavaruus ja aliavaruus

Alkupalat
1 Vektoriavaruus
2 Aliavaruus
3 Lineaarikombinaatio
4 Vektorien virittämä aliavaruus
5 Homogeenisen yhtälöryhmän ratkaisut
6 Matriisin ja vektorin tulo
Harjoitustehtäviä
Tutkimustehtävä: Polynomiavaruus
Tutkimustehtävä: Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisut

3.2 Kanta ja dimensio

Alkupalat
1 Lineaarinen riippuvuus
2 Lineaarinen riippumattomuus
3 Kanta
4 Dimensio
5 Aliavaruuden kannan muodostaminen
Harjoitustehtäviä
Tutkimustehtävä: Koordinaattivektori
Tutkimustehtävä: Hamming-koodi
Tutkimustehtävä: Polynomiavaruuden aliavaruuksia

3.3 Normi ja sisätulo

Alkupalat
1 Normi
2 Sisätulo
3 Kulma
4 Kohtisuoruus
5 Ortonormaali joukko
6 Projektio
Harjoitustehtäviä
Tutkimustehtävä: Pisteen etäisyys tasosta
Tutkimustehtävä: Cauchyn-Schwarzin epäyhtälö ja kolmioepäyhtälö

3.4 Tason lineaarikuvaukset

Alkupalat
1 Lineaarikuvaus
2 Peilaus origon ja koordinaattiakselien suhteen
3 Homotetia
4 Projektiokuvaus
5 Peilaus suoran suhteen
6 Kierto
Harjoitustehtäviä
Tutkimustehtävä: Vektorin projektio tasolle
Tutkimustehtävä: Tason kierto

3.1 Vektoriavaruus ja aliavaruus

Alkupalat

1. Onko suoran $y = 2x$ kahta pistettä vastaavien paikkavektorien summa aina tämä suoran paikkavektori?

2. Kuten edellä, mutta tarkastellaan suoraa $y = 2x + 1$.

1 Vektoriavaruus

Matriisilaskennassa pidimme joukkojen $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$ ja $\mathbf{R}^n$ alkioita pystyvektoreina ja merkitsimme niitä isoilla kirjaimilla. Käytämme samaa merkintää myös nyt tutkiessamme vektorilaskentaa. Pidämme vektoreita "paikkavektoreina" eli sovimme, että niiden alkupiste on origo. Palautamme aluksi mieleemme seuraavat joukon $V = \mathbf{R}^n$ vektorien yhteenlaskun ja skalaarilla kertomisen ominaisuudet.

(V_1) Jokaiselle parille $X, Y \in V$ on määritelty summa $X + Y$, joka $\in V$.
(V_2) Jokaiselle luvulle $c \in \mathbf{R}$ ja vektorille $X \in V$ on määritelty tulo cX, joka $\in V$.
(V_3) Seuraavat laskusäännöt ovat voimassa kaikilla $X, Y \in V$, $c, d \in \mathbf{R}$.

Vaihdantalait	$X + Y = Y + X,$	$cX = Xc$
Liitäntälait	$X + (Y + Z) = (X + Y) + Z,$	$c(dX) = (cd)X$
Osittelulait	$(c + d)X = cX + dX,$	$c(X + Y) = cX + cY$
Nolla-alkio	$X + O = X$	
Vasta-alkio	$X + (-X) = O$	
Luvulla 1 kertominen	$1X = X$	

Yleisesti sanomme, että joukko V on *vektoriavaruus*, jos ominaisuudet (V_1)–(V_3) ovat voimassa. Vektoriavaruuden alkioita kutsumme *vektoreiksi*.

Esimerkki 1.

(a) Vektoriavaruuden $\mathbf{R}$ geometrinen tulkinta on suora.
(b) Vektoriavaruuden $\mathbf{R}^2$ geometrinen tulkinta on taso.
(c) Vektoriavaruuden $\mathbf{R}^3$ geometrinen tulkinta on kolmiulotteinen avaruus.
(d) Voimme ajatella neliulotteista vektoriavaruutta $\mathbf{R}^4$, vaikka meillä ei ole geometrista mielikuvaa siitä. Tämän avaruuden alkioina ovat neliulotteiset vektorit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}.$$

Esimerkki 2. $\mathbf{R}^{2\times 2}$ on vektoriavaruus, sillä 2×2-matriisien yhteenlasku ja skalaarilla kertominen toteuttavat ominaisuudet (V_1) – (V_3)). Yleisesti $\mathbf{R}^{m\times n}$ on vektoriavaruus.

2 Aliavaruus

Vektoriavaruuden V *aliavaruus* on joukon V sellainen osajoukko S, joka itsessään on vektoriavaruus. Joukon S ($\neq \varnothing$) on tällöin toteutettava *sulkeutuvuusehdot*

(A_1) Jos $X \in S$ ja $Y \in S$, niin $X + Y \in S$.
(A_2) Jos $X \in S$ ja $c \in \mathbf{R}$, niin $cX \in S$.

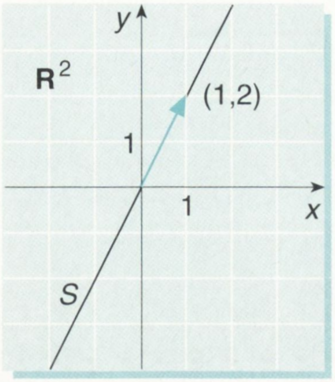
Vektoriavaruuden V *triviaalit aliavaruudet* ovat *nolla-avaruus* $\{O\}$ ja V itse.

Esimerkki 1. Osoita, että vektoriavaruuden $\mathbf{R}^2$ osajoukko $S = \{t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbf{R}\}$ on aliavaruus. Mikä on tämän aliavaruuden geometrinen merkitys?

Todistamme sulkeutuvuusehdot kahdella tavalla. Olkoon $X \in S$, $Y \in S$, $c \in \mathbf{R}$.

Tapa 1 (Geometrinen perustelu). Vektori X on joko samansuuntainen tai vastakkaissuuntainen vektorin $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ kanssa. Sama koskee vektoria Y, ja siis myös vektoria $X + Y$ sekä vektoria cX. Täten vektorit $X + Y$ ja cX ovat vektorin $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ määräämällä suoralla eli joukossa S. Siis (A_1) ja (A_2) ovat voimassa.

Geometriselta merkitykseltään S on suora $y = 2x$.

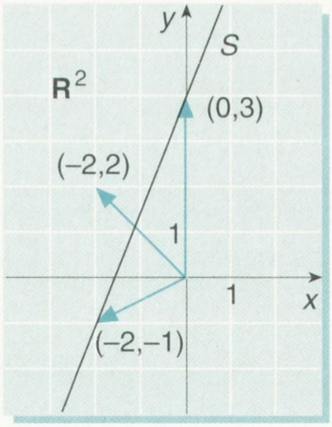


Tapa 2 (Algebrallinen perustelu).

Koska $X = r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ja $Y = s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ joillakin $r, s \in \mathbf{R}$, niin $X + Y = r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (r + s)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Merkitsemällä $t = r + s$ huomaamme, että $X + Y \in S$. Vastaavasti $cX = cr\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in S$.

Esimerkki 2. Osoita, että suora $S = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid y = 2x + 3\}$ ei ole vektoriavaruuden $\mathbf{R}^2$ aliavaruus.

Esimerkiksi $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \in S$ ja $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in S$, mutta $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \notin S$. Siis ($A_1$) ei ole voimassa. Yhtä helposti näemme, ettei myöskään (A_2) ole voimassa.



Esimerkki 3. Osoita, että joukko $S = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | x + 2y - 3z = 0\}$ on vektoriavaruuden $\mathbf{R}^3$ aliavaruus. Mikä on tämän aliavaruuden geometrinen merkitys?

Olkoon $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in S$ ja $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in S$, jolloin $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$ ja $y_1 + 2y_2 - 3y_3 = 0$.

Vektorille

$$X + Y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$$

on $x_1 + y_1 + 2(x_2 + y_2) - 3(x_3 + y_3) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3) + (y_1 + 2y_2 - 3y_3) = 0 + 0 = 0$, joten $X + Y \in S$. Vastaavasti huomaamme, että $cX = S$, kun $c \in \mathbf{R}$.

Aliavaruuden geometrinen merkitys on origon kautta kulkeva taso.

3 Lineaarikombinaatio

Vektoriavaruuden V alkioiden $X_1, X_2, ..., X_p$ *lineaarikombinaatio* on vektori

$$t_1X_1 + ... + t_pX_p,$$

missä $t_1, ..., t_p$ ovat reaalilukuja.

Esimerkki 1. Esitä vektorien $E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ja $F = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ lineaarikombinaationa vektori **(a)** $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, **(b)** $Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) Etsimme siis reaalilukuja s ja t, joilla $X = sE + tF$ eli

$$\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Saamme yhtälöryhmän

$$\begin{cases} s + t = 1 \\ 2s + t = 3 \\ -t = 1, \end{cases}$$

josta $s = 2$, $t = -1$. Siis $X = 2E - F$.

(b) Yhtälöstä $Y = sE + tF$ saamme yhtälöryhmän

$$\begin{cases} s + t = 3 \\ 2s + t = 2 \\ -t = -2, \end{cases}$$

jolla ei ole ratkaisua (miksei?). Siis vektoria Y ei voida esittää vektorien E ja F lineaarikombinaationa.

4 Vektorien virittämä aliavaruus

Vektoriavaruuden V alkioiden $X_1, \ldots, X_p$ *virittämä aliavaruus* on näiden vektorien kaikkien lineaarikombinaatioiden joukko. Käytämme sille merkintää span $\{X_1, \ldots, X_p\}$. Osoitamme, että $S = \text{span}\,\{X_1, \ldots, X_p\}$ on todella aliavaruus.

Olkoon $U, V \in S$. Tällöin $U = s_1X_1 + \ldots + s_pX_p$, $V = t_1X_1 + \ldots + t_pX_p$ joillakin reaaliluvuilla $s_1, \ldots, s_p, t_1, \ldots, t_p$. Koska

$$U + V = (s_1 + t_1)X_1 + \ldots + (s_p + t_p)X_p,$$

niin $U + V \in S$, joten (A_1) on voimassa. Olkoon lisäksi $c \in \mathbf{R}$. Koska

$$cU = cs_1X_1 + \ldots + cs_pX_p,$$

niin $cU \in S$, joten (A_2) on voimassa.

Esimerkki 1.

(a) $\mathbf{R}^2 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$, sillä jokainen vektori $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ voidaan esittää muodossa $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

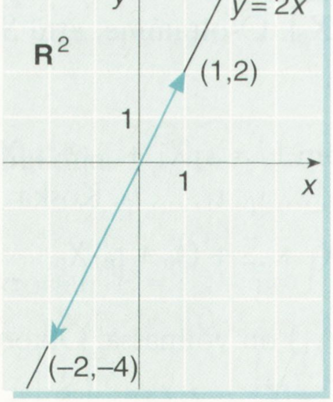
(b) Vastaavasti $\mathbf{R}^3 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Esimerkki 2. Minkä $\mathbf{R}^2$:n aliavaruuden virittävät

(a) $E = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ja $F = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$, (b) $E = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ja $F = \begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$?

(a) Jokainen $X = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ on vektorien E ja F lineaarikombinaatio $X = sE + tF$, sillä yhtälöparilla $s + 3t = a$, $2s - t = b$ on aina ratkaisu s, t (miksi?). Täten span $\{E, F\} = \mathbf{R}^2$. Yleisesti kaksi erisuuntaista vektoria virittää koko tason.

(b) Tutkimme, millä ehdolla vektori $X = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ voidaan esittää muodossa $X = sE + tF$. Saamme yhtälöryhmän $s - 2t = a$, $2s - 4t = b$, jolla on ratkaisuja, jos ja vain jos $b = 2a$ (miksi?). Täten span $\{E, F\} = \left\{\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \middle| \, b = 2a\right\}$ eli suora $y = 2x$. Yleisesti kaksi yhdensuuntaista vektoria virittää saman suoran kuin toinen niistä.



5 Homogeenisen yhtälöryhmän ratkaisut

Olkoon A $m \times n$-matriisi eli $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$. Osoitamme, että *homogeenisen yhtälöryhmän* $AX = O$ *ratkaisut muodostavat avaruuden* $\mathbf{R}^n$ *aliavaruuden.*

Merkitköön S näiden ratkaisujen joukkoa. Olkoon $X, Y \in S$, jolloin $AX = O$ ja $AY = O$. Koska $A(X + Y) = AX + AY = O + O = O$, niin $X + Y \in S$, joten (A_1) on voimassa. Olkoon lisäksi $c \in \mathbf{R}$. Koska $A(cX) = cAX = cO = O$, niin $cX \in S$, joten (A_2) on voimassa.

Esimerkki. Määritä jotkin sellaiset vektorit, jotka virittävät yhtälöparin

$$\begin{cases} -x + 2y - 3z + u = 0 \\ 2x - 3y + z - 3u = 0 \end{cases}$$

ratkaisujen muodostaman $\mathbf{R}^4$:n aliavaruuden.

Koska

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \overset{2}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{-1}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

niin yhtälöpari on pelkistetyssä porrasmuodossa

$$\begin{cases} x - 7z - 3u = 0 \\ y - 5z - u = 0. \end{cases}$$

Tämän ratkaisu on $x = 7s + 3t$, $y = 5s + t$, $z = s$, $u = t$, missä s ja t ovat mielivaltaisia reaalilukuja. Ratkaisuvektori on siis

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7s + 3t \\ 5s + t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

joten kysytyt virittäjävektorit ovat

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ja } \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6 Matriisin ja vektorin tulo

Matriisin $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ ja vektorin $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tulo

$$AX = \begin{pmatrix} ax + by + cz \\ dx + ey + fz \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b \\ e \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$$

on *matriisin* A *pystyvektorien lineaarikombinaatio, jonka kertoimina ovat vektorin* X *alkiot*. Tämä tulos on voimassa kaikilla $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $X \in \mathbf{R}^n$. Jos siis

$$A = (A_1 \ldots A_n), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix},$$

niin

$$AX = x_1A_1 + \ldots + x_nA_n.$$

Täten kaikkien muotoa AX olevien vektorien joukko on matriisin A pystyvektorien virittämä aliavaruus. Toisin sanoen

$$\{AX \mid X \in \mathbf{R}^n\} = \text{span}\,\{A_1, \ldots, A_n\}.$$

Esimerkki. Jos $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, niin $\{AX \mid X \in \mathbf{R}^2\} = \text{span}\,\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}\}$.

Harjoitustehtäviä

112. Onko joukko

(a) $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbf{R}\right\}$, (b) $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| z = x + y\right\}$,

(c) $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| z = 2x + 1\right\}$, (d) $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x + y = 0 \text{ ja } 2y - z = 0\right\}$

avaruuden $\mathbf{R}^3$ aliavaruus? Mikä on tämän joukon geometrinen merkitys?

113. Onko joukko

(a) $\left\{\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \middle| s \in \mathbf{R}\right\}$,

(b) $\left\{\begin{pmatrix} -9 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| s, t \in \mathbf{R}\right\}$,

(c) $\left\{\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| s, t \in \mathbf{R}\right\}$,

(d) $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} \middle| s \in \mathbf{R}\right\}$

avaruuden $\mathbf{R}^3$ aliavaruus? Mikä on tämän joukon geometrinen merkitys?

114. Onko joukko

(a) $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} \middle| x - y = 2\right\}$,

(b) $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} \middle| z = x + 2y\right\}$ avaruuden $\mathbf{R}^4$ aliavaruus?

115. Esitä vektori

(a) $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ vektorien $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ lineaarikombinaationa,

(b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektorien $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ lineaarikombinaationa.

116. Esitä vektori

(a) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektorien $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ lineaarikombinaationa,

(b) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ vektorien $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ lineaarikombinaationa.

117. Voidaanko matriisi **(a)** $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, **(b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ esittää matriisien $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ lineaarikombinaationa?

118. Millä vakion a arvoilla $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ a \end{pmatrix} \in \text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}\}$?

119. Minkä $\mathbf{R}^2$:n aliavaruuden virittävät

(a) $\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$, **(b)** $\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, **(c)** $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$?

120. Minkä $\mathbf{R}^3$:n aliavaruuden virittävät

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, **(b)** $\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, **(c)** $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$?

121. Määritä pisteiden (1,1,1), (2,–1,2) ja (0,–3,0) kautta kulkevan tason yhtälö

(a) vektorimuodossa $X = E_0 + sE_1 + tE_2$,

(b) koordinaattimuodossa $ax + by + cz + d = 0$.

122. Onko $\mathbf{R}^3 = \text{span}\{E, F, G\}$, kun $E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$?

123. Osoita, että $\text{span}\{A_1, A_2, A_3, A_4\} = \mathbf{R}^{2\times 2}$, kun $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

124. Olkoon $E = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \\ -3 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$. Määritä aliavaruuden span $\{E,F\}$ yhtälö koordinaattimuodossa. Onko G tämän tason vektori?

125. Minkä $\mathbf{R}^2$:n aliavaruuden muodostavat yhtälöryhmän

(a) $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 5y = 0, \end{cases}$ **(b)** $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ -x + y = 0 \\ -2x - 3y = 0 \end{cases}$

ratkaisut? Määritä aliavaruuden virittäjävektorit.

126. Minkä $\mathbf{R}^3$:n aliavaruuden muodostavat yhtälöryhmän

(a) $\begin{cases} x + 2y - 4z = 0 \\ -x - y + z = 0, \end{cases}$ **(b)** $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$

ratkaisut? Määritä aliavaruuden virittäjävektorit.

127. Olkoon S matriisin $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ pystyvektorien virittämä $\mathbf{R}^3$:n aliavaruus ja olkoon $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix}$. **(a)** Osoita, että $B \in S$.
(b) Mitä voidaan tällä perusteella sanoa yhtälöryhmän $AX = B$ ratkeavuudesta?

128. **(a)** Osoita, että taso $ax + by + cz = 0$ on $\mathbf{R}^3$:n aliavaruus.
(b) Osoita, että taso joka ei kulje origon kautta, ei ole $\mathbf{R}^3$:n aliavaruus.

Tutkimustehtävä: *Polynomiavaruus*

Olkoon V kaikkien reaalimuuttujan x polynomien joukko.

(a) Osoita, että V on vektoriavaruus, kun laskutoimituksina ovat polynomien yhteenlasku ja reaaliluvulla kertominen.

(b) Onko vakiopolynomien joukko $\{p \mid p(x) = c\}$ V:n aliavaruus?

(c) Onko toisen asteen polynomien joukko $\{p \mid p(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0,\ b, c \in \mathbf{R}\}$ V:n aliavaruus?

(d) Onko korkeintaan toisen asteen polynomien joukko $\{p \mid p(x) = ax^2 + bx + c,\ a, b, c \in \mathbf{R}\}$ V:n aliavaruus?

Tutkimustehtävä: *Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisut*

(a) Muodostavatko epähomogeenisen yhtälöryhmän $AX = B$ $(B \neq 0)$ ratkaisut $\mathbf{R}^n$:n aliavaruuden?

(b) Oletetaan, että X_0 on eräs yhtälöryhmän $AX = B$ ratkaisu. Osoita, että yhtälöryhmän kaikki ratkaisut ja vain ne ovat muotoa $X = X_0 + Y$, missä Y on vastaavan homogeenisen yhtälöryhmän $AY = O$ ratkaisu. Toisin sanoen epähomogeenisen yhtälöryhmän yleinen ratkaisu saadaan etsimällä yksi yksityisratkaisu ja lisäämällä siihen homogeenisen yhtälöryhmän yleinen ratkaisu.

3.2 Kanta ja dimensio

Alkupalat

1. Ovatko vektorit **(a)** $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, **(b)** $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ yhdensuuntaiset?

2. Millä ehdolla tason kaksi vektoria ovat yhdensuuntaiset?

1 Lineaarinen riippuvuus

Vektoriavaruuden V alkiot $X_1, \ldots, X_p$ ovat *lineaarisesti riippuvia*, jos jokin niistä voidaan esittää muiden lineaarikombinaationa eli jos jokin vektori kuuluu muiden virittämään aliavaruuteen. Sanomme tällöin myös, että joukko $\{X_1, \ldots, X_p\}$ on lineaarisesti riippuva.

Esimerkki 1. Vektorit $\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ ovat lineaarisesti riippuvia, sillä $\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

Esimerkki 2. Vektorit $E = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ ja $X = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$ ovat lineaarisesti riippuvia, sillä $X = 2E - F$ (s. 93).

Jokainen sellainen vektorijoukko, joka sisältää nollavektorin, on lineaarisesti riippuva. Nollavektori voidaan näet esittää joukon muiden vektorien sellaisena lineaarikombinaationa, jossa kaikki kertoimet = 0. Sovimme myös, että pelkän nollavektorin muodostama joukko on lineaarisesti riippuva.

Vektorit $X_1, \ldots, X_p$ ovat lineaarisesti riippuvia, jos ja vain jos ne toteuttavat ehdon

$$t_1X_1 + \ldots + t_pX_p = O$$

joillakin sellaisilla reaaliluvuilla $t_1, \ldots, t_p$, joista ainakin yksi $\neq 0$.

Todistamme tämän lauseen. Oletamme aluksi, että vektorit $X_1, \ldots, X_p$ ovat lineaarisesti riippuvia. Tällöin jokin niistä voidaan esittää muiden lineaarikombinaationa. Tarvittaessa numerointia muuttamalla voimme sopia, että X_p on tällainen vektori. On siis olemassa sellaiset reaaliluvut $s_1, \ldots, s_{p-1}$, että $X_p = s_1X_1 + \ldots + s_{p-1}X_{p-1}$. Tällöin

$$s_1X_1 + \ldots + s_{p-1}X_{p-1} + (-1)X_p = O,$$

joten kysytyt luvut ovat $t_1 = s_1, \ldots, t_{p-1} = s_{p-1}, t_p = -1$.

Oletamme nyt kääntäen, että on olemassa sellaiset luvut $t_1, \ldots, t_p$, joista ainakin yksi $\neq 0$, että $t_1X_1 + \ldots + t_pX_p = O$. Tarvittaessa numerointia muuttamalla voimme sopia, että $t_1 \neq 0$. Tällöin

$$X_1 = -\frac{t_2}{t_1}X_2 - \ldots - \frac{t_p}{t_1}X_p,$$

joten vektorit $X_1, \ldots, X_p$ ovat lineaarisesti riippuvia. Lause on siis todistettu.

Merkitsemällä

$$A = (X_1 \ldots X_p), \quad T = \begin{pmatrix} t_1 \\ . \\ . \\ . \\ t_p \end{pmatrix}$$

saamme yhtälön $t_1X_1 + \ldots + t_pX_p = O$ muotoon $AT = O$. Voimme siis esittää edellä olevan lauseen vaihtoehtoisella tavalla.

Vektorit $X_1, \ldots, X_p$ ovat lineaarisesti riippuvia, jos ja vain jos homogeenisella yhtälöryhmällä

$$(X_1 \ldots X_p)\begin{pmatrix} t_1 \\ . \\ . \\ . \\ t_p \end{pmatrix} = O$$

on ei-triviaali ratkaisu $t_1, \ldots, t_p$.

Esimerkki 3. Osoita, että vektorit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ja $Z = \begin{pmatrix} 14 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ovat lineaarisesti riippuvia.

Ehtoa $rX + sY + tZ = O$ vastaava yhtälöryhmä

$$\begin{cases} r - 4s + 14t = 0 \\ 3r + s + 3t = 0 \\ 5r + 3s + t = 0 \end{cases}$$

on matriisimuodossa

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 14 \\ 3 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Kerroinmatriisin

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 14 \\ 3 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -3 \\ -5 \\ \; \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 14 \\ 0 & 13 & -39 \\ 0 & 23 & -69 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \frac{1}{13} \\ \frac{1}{23} \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 14 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 14 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

aste 2 on pienempi kuin tuntemattomien määrä 3, joten yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua (s. 63). Vektorit ovat siis lineaarisesti riippuvia.

Kaksi tason tai avaruuden vektoria ovat lineaarisesti riippuvia, jos ja vain jos ne ovat samalla suoralla (eli yhdensuuntaisia). Kolme avaruuden vektoria ovat lineaarisesti riippuvia, jos ja vain jos ne ovat samassa tasossa. Tällöin ne saattavat olla myös samalla suoralla.

2 Lineaarinen riippumattomuus

Vektorit $X_1, ..., X_p$ ovat *lineaarisesti riippumattomia*, jos ne eivät ole lineaarisesti riippuvia. Tällöin yhtään niistä ei voida esittää muiden lineaarikombinaationa.

Vektorit $X_1, \ldots, X_p$ ovat lineaarisesti riippumattomia, jos ja vain jos ainoat reaaliluvut $t_1, \ldots, t_p$, joille

$$t_1X_1 + ... + t_pX_p = O,$$

ovat $t_1 = \ldots = t_p = 0.$

Vektorit $X_1, \ldots, X_p$ ovat lineaarisesti riippumattomia, jos ja vain jos homogeenisella yhtälöryhmällä

$$(X_1 \ldots X_p)\begin{pmatrix} t_1 \\ . \\ . \\ . \\ t_p \end{pmatrix} = O$$

ei ole muita ratkaisuja $t_1, ..., t_p$ *kuin triviaali ratkaisu.*

Nämä lauseet seuraavat välittömästi kohdan 1 lauseista.

Esimerkki 1. Osoita, että vektorit $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ ja $Z = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ovat lineaarisesti riippumattomia.

Ehdosta $rX + sY + tZ = O$ eli

$$\begin{cases} \quad\; s + 4t = 0 \\ r + 2s - \; t = 0 \\ 5r + 8s \quad\;\; = 0 \end{cases}$$

saamme

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 8 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Kerroinmatriisin

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 8 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 5 & 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-5} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}_{2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 0 \end{pmatrix}$$

aste 3 on sama kuin tuntemattomien lukumäärä, joten yhtälöryhmällä on vain triviaali ratkaisu $r = s = t = 0$. Vektorit ovat siis lineaarisesti riippumattomia.

Kaksi tason tai avaruuden vektoria ovat lineaarisesti riippumattomia, jos ja vain jos ne eivät ole samalla suoralla (eli ovat erisuuntaisia). Kolme avaruuden vektoria ovat lineaarisesti riippumattomia, jos ja vain jos ne eivät ole samassa tasossa.

3 Kanta

Vektoriavaruuden V alkioiden $E_1, ..., E_p$ joukko on tämän avaruuden *kanta*, jos nämä vektorit ovat lineaarisesti riippumattomia ja virittävät avaruuden V. Voidaan todistaa, että $\{E_1, ..., E_p\}$ on kanta, jos ja vain jos avaruuden V jokainen vektori on esitettävissä *yksikäsitteisesti* vektorien $E_1, ..., E_p$ lineaarikombinaationa. Sovimme, että nolla-avaruudella $\{O\}$ on *tyhjä kanta* $\emptyset$.

Vektorit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ muodostavat avaruuden $\mathbf{R}^2$ *luonnollisen kannan.*

Vektorit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ muodostavat avaruuden $\mathbf{R}^3$ luonnollisen kannan. Vastaavasti määrittelemme avaruuden $\mathbf{R}^n$ luonnollisen kannan.

Esimerkki 1. Olkoon $E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Onko $\{E, F\}$ avaruuden $\mathbf{R}^2$ kanta?

Tutkimme, voidaanko mielivaltainen vektori $B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ esittää yksikäsitteisesti muodossa $B = sE + tF$. Saamme yhtälöparin $s + 3t = a$, $2s + 4t = b$. Täydennetyn kerroinmatriisin

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 2 & 4 & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 0 & -2 & b - 2a \end{pmatrix}$$

aste = kerroinmatriisin aste = tuntemattomien lukumäärä 2, joten yhtälöparilla on yksikäsitteinen ratkaisu (s. 63). Siis $\{E, F\}$ on kanta.

Esimerkki 2. Olkoon $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Onko

(a) $\{E_1, E_2\}$, (b) $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ avaruuden $\mathbf{R}^3$ kanta?

(a) Ei ole. Vektorit tosin ovat lineaarisesti riippumattomia, mutta ne eivät viritä avaruutta $\mathbf{R}^3$. Nimittäin esimerkiksi vektoria E_4 ei voida esittää niiden lineaarikombinaationa (miksei?).

(b) Ei ole. Vektorit tosin virittävät avaruuden $\mathbf{R}^3$, mutta ne eivät ole lineaarisesti riippumattomia. Ehtoa $t_1E_1 + t_2E_2 + t_3E_3 + t_4E_4 = O$ vastaavan yhtälöryhmän kerroinmatriisin

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

aste 3 on näet pienempi kuin tuntemattomien lukumäärä 4, joten yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua.

4 Dimensio

Olkoon V sellainen vektoriavaruus, jossa on n alkion kanta. Tällöin voidaan todistaa, että avaruuden V kaikissa muissakin kannoissa on n vektoria. Edelleen voidaan näyttää, että jokainen n vektorin lineaarisesti riippumaton joukko on avaruuden V kanta. Sanomme, että tämä kantavektorien lukumäärä n on avaruuden V *ulotteisuusluku* eli *dimensio*, ja merkitsemme $n = \dim V$.

Esimerkki 1. $\dim \mathbf{R}^3 = 3$, $\dim \mathbf{R}^n = n$.

Esimerkki 2. Olemme (s. 90, esim. 2) todenneet, että $m \times n$-matriisit muodostavat vektoriavaruuden. Mitä on **(a)** $\dim \mathbf{R}^{2\times 2}$, **(a)** $\dim \mathbf{R}^{m\times n}$?

(a) Matriisit (eli vektoriavaruuden $\mathbf{R}^{2\times 2}$ vektorit)

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ovat lineaarisesti riippumattomia.

Ehdosta $r\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = O$ näet seuraa

$\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} = 0$ ja edelleen $r = s = t = u = 0$. Nämä matriisit virittävät

$\mathbf{R}^{2\times 2}$:n, sillä jokainen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Siis avaruudessa $\mathbf{R}^{2\times 2}$ on neljän vektorin kanta, joten $\dim \mathbf{R}^{2\times 2} = 4$.

(b) Vastaavasti huomamme, että $\dim \mathbf{R}^{m\times n} = mn$.

5 Aliavaruuden kannan muodostaminen

Aliavaruus ilmoitetaan usein virittäjävektorien avulla. Jos ne ovat lineaarisesti riippumattomia, niin ne nuodostavat tämän aliavaruuden kannan. Jos taas ne ovat lineaarisesti riippuvia, niin voidaan menetellä seuraavasti. Aluksi etsitään sellainen vektori, joka voidaan esittää muiden lineaarikombinaationa. Se poistetaan. Jos jäljelle jääneet vektorit ovat lineaarisesti riippumattomia, niin ne muodostavat kannan. Muussa tapauksessa poistetaan taas sellainen vektori, joka on muiden jäljellä olevien lineaarikombinaaatio, tutkitaan, ovatko jäljelle jääneet vektorit lineaarisesti riippumattomia, ja kielteisessä tapauksessa jatketaan vastaavasti.

Jos kaksi matriisia ovat (vaakarivi)ekvivalentteja, niin voidaan näyttää, että niiden vaakavektorit virittävät saman aliavaruuden. Siksi aliavaruuden kanta voidaan määrittää myös saattamalla porrasmuotoon matriisi, jonka *vaaka*vektoreina ovat virittäjävektorit. Tällöin porras*vaaka*rivit muodostavat kannan, sillä ne ovat lineaarisesti riippumattomia.

Esimerkki. Määritä vektorien $E = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ ja $G = \begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix}$ virittämän $\mathbf{R}^3$:n aliavaruuden jokin kanta.

Tapa 1. Tutkimme, ovatko E, F ja G lineaarisesti riippuvia. Olkoon $rE + sF + tG = O$. Vastaavan yhtälöryhmän täydennetty kerroinmatriisi on

$$\begin{pmatrix}1&3&5&0\\2&2&6&0\\3&1&7&0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&3&5&0\\0&-4&-4&0\\0&-8&-8&0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&3&5&0\\0&-4&-4&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\cdot\left(-\tfrac{1}{4}\right) \sim$$

$$\begin{pmatrix}1&3&5&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Porrasmuotoisella yhtälöparilla $r + 2t = 0$, $s + t = 0$ on äärettömän monta ratkaisua, esimerkiksi $r = -2$, $s = -1$, $t = 1$. Siis $2E - F + G = O$, joten voimme poistaa vaikkapa vektorin $G = -2E + F$. Jäljelle jäävät vektorit E ja F ovat erisuuntaisina lineaarisesti riippumattomia, joten ne muodostavat kysytyn kannan. (Yhtä hyvin voisimme poistaa F:n jolloin saisimme kannan $\{E, G\}$ tai E:n, jolloin saisimme kannan $\{F, G\}$.)

Tapa 2. Muodostamme matriisin, jonka vaakavektoreina ovat E, F ja G. Koska

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\\5&6&7\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&2&3\\0&-4&-8\\5&6&7\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&2&3\\0&-4&-8\\0&-4&-8\end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-4&-8\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\left(-\tfrac{1}{4}\right) \sim \begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

niin porrasvaakariveistä saadut vektorit $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ muodostavat vaaditun kannan.

Harjoitustehtäviä

Ovatko tehtävissä 129–131 annetut vektorit lineaarisesti riippumattomia?

129. (a) $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}16\\-4\end{pmatrix}$.

130. (a) $\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\6\\-5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$.

131. (a) $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\1\\1\end{pmatrix}$.

132. Ovatko vektorit (a) $X_1, X_1 + X_2, X_1 - X_2$, (b) $X_1, 2X_1 - 3X_2, 4X_1 + 5X_2$, (c) $X_1 + X_2$ ja $X_1 - X_2$ lineaarisesti riippumattomia, kun vektorit X_1 ja X_2 ovat lineaarisesti riippumattomat.

133. Ovatko matriisit

(a) $\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix}-2 & 3\\4 & -1\end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix}6 & -9\\-12 & 3\end{pmatrix}$,

(d) $\begin{pmatrix}4 & 3\\2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 4\\1 & 3\end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix}3 & 3\\2 & 1\end{pmatrix}$, (e) $\begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4 & 4\\2 & 1\end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix}7 & 6\\8 & 9\end{pmatrix}$

lineaarisesti riippumattomia?

134. Onko $\{E,F\}$ avaruuden $\mathbf{R}^2$ kanta, kun

(a) $E = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$, (b) $E = \begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$?

135. Muodostavatko vektorit

(a) $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-5\\1\\2\end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\5\\-2\end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix}5\\-3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$

avaruuden $\mathbf{R}^3$ kannan?

136. Millä vakion a arvoilla vektorit $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ muodostavat $\mathbf{R}^3$:n kannan?

137. Muodosta $\mathbf{R}^3$:n aliavaruuden

(a) $\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | x + y = 0, y - z = 0\}$, (b) $\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | x = 2y\}$,

(c) $\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | x - 2y + z = 0\}$

jokin kanta.

138. Määritä vektorien

(a) $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -18 \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

virittämän $\mathbf{R}^3$:n aliavaruuden (i) jokin kanta, (ii) dimensio.

139. Määritä vektorien

(a) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

virittämän $\mathbf{R}^4$:n aliavaruuden (i) jokin kanta, (ii) dimensio.

140. Onko $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ avaruuden $\mathbf{R}^{2\times 2}$ kanta, kun

(a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(b) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$?

Tutkimustehtävä: *Koordinaattivektori*

Olkoon $E = \{E_1, E_2, ..., E_n\}$ vektoriavaruuden V kanta. Tällöin jokainen avaruuden V vektori X voidaan esittää yksikäsitteisesti kannan lineaarikombinaationa $X = x_1E_1 + x_2E_2 + ... + x_nE_n$. Luvut $x_1, x_2, ..., x_n$ ovat vektorin X *koordinaatit kannan E suhteen*. Koordinaattien muodostama vektori

$$X_E = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

on vektorin X *koordinaattivektori kannan E suhteen*.

(a) Mitä voidaan sanoa vektorin koordinaattivektorista luonnollisen kannan suhteen?

(b) Määritä $\mathbf{R}^2$:n vektorin $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ koordinaattivektori kannan $\{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\}$ suhteen.

(c) Olkoon $E = \{E_1, E_2\}$ jokin $\mathbf{R}^2$:n kanta ja $C = (E_1\ E_2)$. Osoita, että jokaiselle vektorille on voimassa $X = CX_E$.

(d) Osoita, että matriisi C on kääntyvä ja $X_E = C^{-1}X$.

Tutkimustehtävä: *Hamming-koodi*

(a) Jäännösluokkien joukon $\mathbf{Z}_2 = \{\underline{0}, \underline{1}\}$ avulla (ks. MT11, s. 82) muodostamme joukon
$\mathbf{Z}_2{}^7 = \{(x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6\ x_7)^T \mid x_k \in \mathbf{Z}_2\}$.

Osoita, että $\mathbf{Z}_2{}^7$ on vektoriavaruus, kun reaaliluvulla kertominen korvataan joukon $\mathbf{Z}_2$ alkiolla kertomisella.

(b) Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{0} & \underline{1} & \underline{0} & \underline{1} & \underline{0} & \underline{1} \\ \underline{0} & \underline{1} & \underline{1} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{1} & \underline{1} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{1} & \underline{1} & \underline{1} & \underline{1} \end{pmatrix}.$$

Määritä homogeenisen yhtälöryhmän $AX = 0$ ratkaisujen muodostaman $\mathbf{Z}_2{}^7$:n aliavaruuden S jokin kanta ja dimensio. Ohje: Voit käyttää Gaussin eliminointimenetelmää.

(c) Osoita, että kaksi mielivaltaista aliavaruuden S vektoria poikkeavat toisistaan ainakin kolmen koordinaatin kohdalla. Jos siis yhteen koordinaattiin tulisi virhe, niin virheellinen muoto olisi lähempänä alkuperäistä vektoria kuin muita aliavaruuden vektoreita. Ohje: Koska ratkaisut muodostavat aliavaruuden, niin riittää osoittaa, että jokaisessa nollavektorista poikkeavassa ratkaisussa on ainakin 3 ykköstä. Aliavaruus S on yksinkertainen binäärinen *Hamming-koodi*, joka on esimerkki tiedonsiirrossa käytettävistä virheitä korjaavista koodeista.

Tutkimustehtävä: *Polynomiavaruuden aliavaruuksia*

Reaalimuuttujan x polynomit muodostavat vektoriavaruuden V polynomien yhteenlaskun ja reaaliluvulla kertomisen suhteen. Polynomit, jotka ovat enintään toista astetta, muodostavat V:n aliavaruuden V_2 (ks. luvun 3.1 tutkimustehtävä). Samoin voidaan osoittaa, että enintään astetta n olevat polynomit muodostavat V:n aliavaruuden V_n. Määritä aliavaruuden **(a)** V_2, **(b)** V_n jokin kanta ja dimensio.

3.3 Normi ja sisätulo

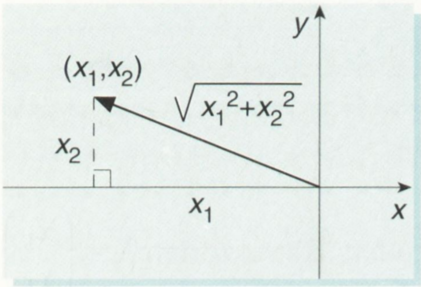
Alkupalat

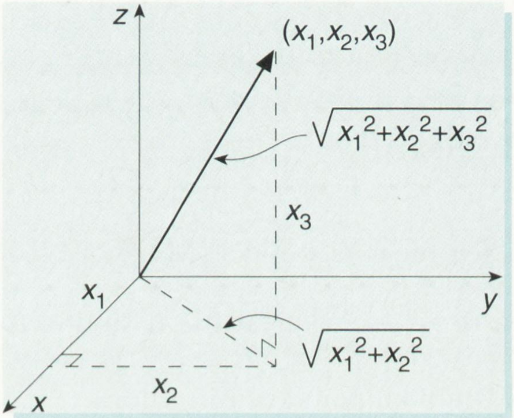
1. Laske pisteen (3, – 4) etäisyys origosta.

2. Laske vektorien $-3\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$ ja $\bar{i} + 3\bar{j} - 4\bar{k}$ skalaaritulo eli pistetulo.

1 Normi

Avaruuden $\mathbf{R}^2$ vektorin $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ pituus on Pythagoraan lauseen mukaan $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Avaruuden $\mathbf{R}^3$ vektorin $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ pituus on vastaavasti $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.





Avaruudessa $\mathbf{R}^n$ meillä ei ole geometrista mielikuvaa pituuksista, mutta voimme siellä *määritellä* vektorin

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

pituudeksi eli *normiksi* luvun $\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$. Käytämme sille merkintää $\|X\|$. Siis

$$\|X\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Esimerkki 1. Vektorin $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$ normi $\|X\| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = 13$.

Esimerkki 2. Määritä sellainen vektori, joka on yhdensuuntainen vektorin

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

kanssa ja jonka normi = 1. Toisin sanoen määritä vektorille X samansuuntainen ja vastakkaissuuntainen *yksikkövektori*.

Koska $\|X\| = \sqrt{1^2 + (-5)^2 + 3^2 + (-1)^2} = 6$, niin kysytyt vektorit ovat

$$\pm \frac{X}{\|X\|} = \pm \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2 Sisätulo

Olemme määritelleet (MT 4, s. 120) avaruuden $\mathbf{R}^2$ vektorien $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ja $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ skalaaritulon eli pistetulon näiden vektorien pituuksien ja välisen kulman kosinin tulona

$$X \cdot Y = \|X\| \, \|Y\| \cos(X, Y)$$

ja saaneet sille algebrallisen esityksen

$$X \cdot Y = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Avaruuden $\mathbf{R}^3$ vektoreille $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ja $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ on vastaavasti

$$X \cdot Y = \|X\| \, \|Y\| \cos(X, Y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3,$$

jonka voimme esittää myös matriisitulona

$$X^TY = (x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Avaruudessa $\mathbf{R}^n$ *määrittelemme* vektorien

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \text{ ja } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$$

skalaaritulon eli *sisätulon* vastaavasti. Siis

$$X \cdot Y = X^TY = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n.$$

Esimerkki. Vektorin $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sisätulo itsensä kanssa on

$$X \cdot X = X^TX = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)^2 + 3^2 + (-2)^2 + 1^2 = 15.$$

Yleisesti on

$$\|X\| = \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{X^TX}.$$

Siis vektorin normi on neliöjuuri vektorin sisätulosta itsensä kanssa.

3 Kulma

Avaruuden $\mathbf{R}^2$ ja $\mathbf{R}^3$ vektoreille on

$$\cos(X, Y) = \frac{X \cdot Y}{\|X\|\,\|Y\|} = \frac{X^TY}{\|X\|\,\|Y\|} \quad (X, Y \neq O).$$

Vastaavasti *määrittelemme* avaruuden $\mathbf{R}^n$ $(n \geq 4)$ vektorien välisen kulman.

Esimerkki 1. Laske vektorien

$$X = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ ja } Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

välinen kulma θ.

Koska

$$X \cdot Y = (-1)3 + 3 \cdot 0 + 2(-3) + 2 \cdot 0 = -9,$$

$$\|X\| = \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{18},$$

$$\|Y\| = \sqrt{Y \cdot Y} = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{18},$$

niin

$$\cos \theta = \cos (X, Y) = \frac{X \cdot Y}{\|X\|\,\|Y\|} = -\frac{9}{\sqrt{18}\sqrt{18}} = -\frac{1}{2}.$$

Lisäksi täytyy olla $0 \le \theta \le 180°$, joten $\theta = 120°$.

Esimerkki 2. Olkoot E ja F tason $\mathbf{R}^2$ sellaiset yksikkövektorit, joiden välinen kulma = 60°. Laske vektorin $X = 4E + 2F$ normi.

Normin neliö on

$$\|X\|^2 = X \cdot X = (4E + 2F) \cdot (4E + 2F) = 16E \cdot E + 16E \cdot F + 4F \cdot F.$$

Koska $\|E\| = \|F\| = 1$ ja $\cos(E, F) = \cos 60° = \frac{1}{2}$, niin

$$E \cdot E = \|E\|^2 = 1, \quad F \cdot F = \|F\|^2 = 1$$

ja

$$E \cdot F = \|E\|\,\|F\| \cos (E, F) = 1 \cdot 1 \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2},$$

niin $\|X\|^2 = 16 + 16 \cdot \frac{1}{2} + 4 = 28$. Täten $\|X\| = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$.

4 Kohtisuoruus

Vektorit ovat *kohtisuorassa* toisiaan vastaan, jos niiden sisätulo = 0. Tällöin niiden välinen kulma = 90°. Käytämme vektorien X ja Y kohtisuoruudelle merkintää $X \perp Y$.

Esimerkki 1. Millä t:n arvolla vektorit

$$X = \begin{pmatrix} -2t \\ 9 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ ja } Y = \begin{pmatrix} 4 \\ t \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa?

Koska $X \cdot Y = (-2t)4 + 9t + (-1)3 + 2 \cdot 0 = t - 3$, niin kohtisuoruusehto on $t - 3 = 0$, josta $t = 3$.

Esimerkki 2. Olkoon $X, Y \in \mathbf{R}^n$. Todista *Pythagoraan lause*: Jos $X \perp Y$, niin

$$\|X + Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2.$$

Oletuksen mukaan $X \cdot Y = 0$, joten

$$\begin{aligned} \|X + Y\|^2 &= (X + Y) \cdot (X + Y) = X \cdot X + X \cdot Y + Y \cdot X + Y \cdot Y \\ &= X \cdot X + 2X \cdot Y + Y \cdot Y \\ &= \|X\|^2 + 0 + \|Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2. \end{aligned}$$

5 Ortonormaali joukko

Vektoriavaruuden *ortonormaali* joukko koostuu toisiaan vastaan kohtisuorista yksikkövektoreista.

Esimerkki 1. Olkoon $E = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ ja $F = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Osoita, että joukko $\{E, F\}$ on ortonormaali.

Vektorit E ja F ovat yksikkövektoreita, sillä

$$\|E\| = \frac{1}{3}\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = 1 \text{ ja}$$

$$\|F\| = \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = 1.$$

Nämä vektorit ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa, sillä

$$E \cdot F = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}((-1)2 + 2 \cdot 1 + (-2)0) = 0.$$

Todistamme, että *ortonormaali joukko on lineaarisesti riippumaton*. Olkoon $S = \{E_1, ..., E_p\}$ ortonormaali joukko. Tarkastelemme yhtälöä

$$t_1E_1 + ... + t_pE_p = O.$$

Kerromme tämän yhtälön (sisätulon mielessä) joukon S mielivaltaisella vektorilla E_i. Vasemmaksi puoleksi tulee

$$E_i \cdot (t_1E_1 + ... + t_pE_p) = t_1(E_i \cdot E_1) + ... + t_p(E_i \cdot E_p).$$

Tässä summassa muut termit ovat nollia paitsi i:s termi, joka on $t_i(E_i \cdot E_i) = t_i\|E\|^2 = t_i$. Oikeaksi puoleksi tulee nolla, joten $t_i = 0$. Koska i on mielivaltainen, niin olemme osoittaneet, että $t_1 = ... = t_p = 0$, mistä väitös seuraa.

Avaruuden $\mathbf{R}^n$ n-alkioinen ortonormaali joukko $K = \{E_1, ..., E_n\}$ on siis tämän avaruuden *ortonormaali kanta*. Määritämme vektorin $X \in \mathbf{R}^n$ *koordinaatit* kannan K suhteen eli luvut $s_1, ..., s_n$, joille

$$X = s_1E_1 + ... + s_nE_n.$$

Ottamalla sisätulon E_i:n kanssa kuten edellä saamme $s_i = X \cdot E_i$. Siis

$$X = (X \cdot E_1)E_1 + ... + (X \cdot E_n)E_n.$$

Esimerkki 2. **(a)** Osoita, että $S = \{E, F\}$ on avaruuden $\mathbf{R}^2$ ortonormaali kanta, kun $E = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$, $F = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$. **(b)** Määritä vektorin $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ koordinaatit tämän kannan suhteen. **(c)** Havainnollista kuviolla (i) näitä kordinaatteja, (ii) vektorin X koordinaatteja luonnollisen kannan $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ suhteen.

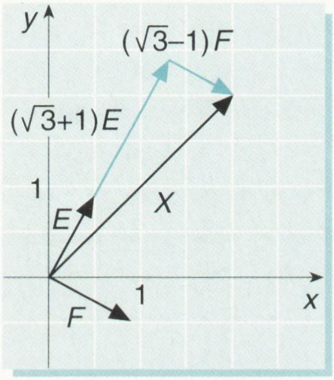
(a) Koska

$$\|E\| = \frac{1}{2}\sqrt{1+3} = 1, \quad \|F\| = \frac{1}{2}\sqrt{3+1} = 1, \quad E \cdot F = \frac{1}{4}(\sqrt{3} - \sqrt{3}) = 0,$$

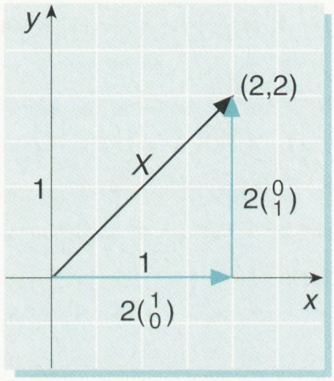
niin S on ortonormaali joukko. Koska siinä on avaruuden $\mathbf{R}^2$ dimension 2 osoittama määrä vektoreita, niin S on ortonormaali kanta.

(b) $X \cdot E = 1 + \sqrt{3}$, $X \cdot F = \sqrt{3} - 1$, joten $X = (\sqrt{3}+1)E + (\sqrt{3}-1)F$.

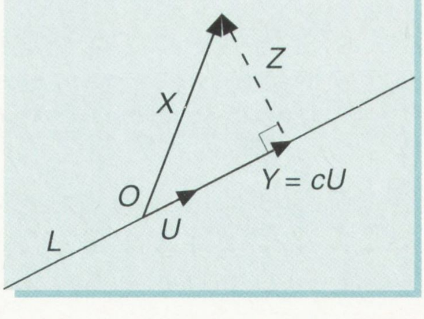
(c) (i)



(ii)



6 Projektio



Olkoon L yksikkövektorin U virittämä origon kautta kulkeva suora tasossa $\mathbf{R}^2$. Toisin sanoen $L = \{tU \mid t \in \mathbf{R}\}$ = span $\{U\}$. Tutkimme, miten annettu vektori $X \in \mathbf{R}^2$ voidaan jakaa komponentteihin, josta toinen on L:n vektori ja toinen on L:ää vastaan kohtisuorassa (eli kohtisuorassa L:n jokaista vektoria vastaan). Etsimme siis hajotelmaa $X = Y + Z$, missä $Y \in L$ ja $Z \perp L$.

Koska $Y \in L$, niin $Y = cU$ jollakin $c \in \mathbf{R}$. Meidän on siis löydettävä sellainen c, että vektori $Z = X - Y = X - cU$ on kohtisuorassa vektoria U vastaan. Toisin sanoen on oltava $Z \cdot U = 0$. Koska $U \cdot U = 1$, niin

$$0 = Z \cdot U = (X - cU) \cdot U = X \cdot U - c(U \cdot U) = X \cdot U - c,$$

joten $c = X \cdot U$. Vektori

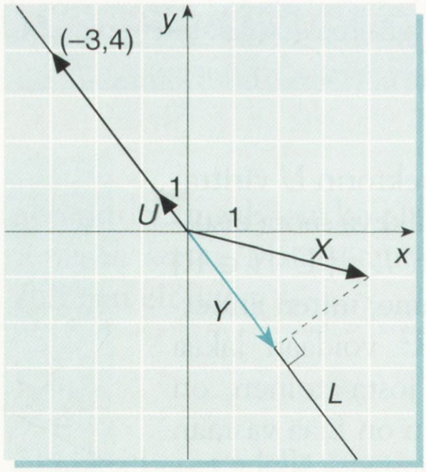
$$Y = cU = (X \cdot U)U$$

on vektorin X *projektio* suoralle L.

Esimerkki. Määritä vektorin $X = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ projektio suoralle $L = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid 4x + 3y = 0\}$.

Vektori $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \in L$ ja sen pituus on 5, joten vektori $U = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ on L:n virittävä yksikkövektori. Kysytty projektio on

$$\begin{aligned} Y &= (X \cdot U)U = (X^T U)U = [(4 \; -1)\ \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}]\ \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{25}\,[4(-3) + (-1)4]\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{16}{25}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{16}{25}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



Harjoitustehtäviä

141. Laske vektorin **(a)** $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, **(b)** $\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, **(c)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T$, **(d)** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}^T$ normi.

142. Muodosta **(a)** vektorin $\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ kanssa samansuuntainen yksikkövektori; **(b)** vektori, joka on vastakkaissuuntainen vektorin $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ kanssa ja jonka normi on 2.

143. Määritä vakio t siten, että $\|X\| = 12$, kun $X = \begin{pmatrix} -7 & 1 & t & -2 & 3 \end{pmatrix}^T$.

144. Laske **(a)** $X \cdot Y$, kun $\|X\| = 3$, $\|Y\| = 2$ ja $(X, Y) = 60°$;
(b) $\|Y\|$, kun $X \cdot Y = -20\sqrt{2}$, $\|X\| = 2$ ja $(X, Y) = 135°$;
(c) (X, Y), kun $X \cdot Y = -27\sqrt{3}$, $\|X\|^2 = 36$ ja $\|Y\|^2 = 81$.

145. Jos $X \cdot Y = \|X\|^2$, niin onko $X = Y$?

146. Laske $X \cdot Y$, kun

(a) $X = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ ja $Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, **(b)** $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ ja $Y = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$,

(c) $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ja $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

147. Laske (X, Y), kun

(a) $X = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ ja $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, **(b)** $X = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ja $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$,

(c) $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ja $Y = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

148. Olkoon $(X, Y) = 45°$. Laske $\|3X - Y\|$, kun $\|X\| = 1$ ja $\|Y\| = 3\sqrt{2}$.

149. Olkoot X ja Y yksikkövektoreita, joiden välinen kulma on $60°$. Millä vakion t arvoilla $\|X - tY\| = \sqrt{3}$?

150. Olkoon $E_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $E_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$, $E_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$. Osoita, että $\{E_1, E_2, E_3\}$ on vektoriavaruuden $\mathbf{R}^3$ ortonormaali kanta.

151. Määritä kaikki avaruuden $\mathbf{R}^3$ vektorit, jotka ovat kohtisuorassa

(a) vektoreita $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$, **(b)** vektoria $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ vastaan.

152. Olkoon $E_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$.

(a) Osoita, että E_1 ja E_2 ovat kohtisuorassa vektoria E_3 vastaan.
(b) Osoita, että jokainen vektorien E_1 ja E_2 lineaarikombinaatio on kohtisuorassa vektoria E_3 vastaan.
(c) Olkoon X kohtisuorassa vektoria E_3 vastaan. Osoita, että X voidaan esittää vektorien E_1 ja E_2 lineaarikombinaationa.
(d) Totea edellisen perusteella, että suora span E_3 on tason span $\{E_1, E_2\}$ normaali.

153. Määritä vektorin $\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ projektio suoralle $L = \{ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mid y = -2x\}$.

154. Määritä vektorin $\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ loppupisteen etäisyys suorasta $L = \{ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mid y = x\}$.

155. Määritä vektorin $\begin{pmatrix}16\\-8\\3\end{pmatrix}$ projektio suoralle span $\{\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\}$.

Tutkimustehtävä: *Pisteen etäisyys tasosta*

Olkoon $T : ax + by + cz + d = 0$ taso avaruudessa $\mathbf{R}^3$ ja $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ mielivaltainen piste.

(a) Osoita, että $N = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ on tason T normaalivektori.

(b) Olkoon $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ jokin tason piste. Pisteen P_0 etäisyys tasosta on vektorin $P_1P_0 = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{pmatrix}$ projektio normaalin N määräämälle origon kautta kulkevalle suoralle. Johda etäisyydelle lauseke

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Tutkimustehtävä: *Cauchyn-Schwarzin epäyhtälö ja kolmioepäyhtälö*

Osoita, että vektoriavaruudessa $\mathbf{R}^n$ pätee

(a) *Cauchyn-Schwarzin epäyhtälö* $\quad |X \cdot Y| \leq \|X\| \|Y\|,$

(b) *kolmioepäyhtälö* $\quad \|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|.$

3.4 Tason lineaarikuvaukset

Alkupalat

1. Mikä on pisteen (2, 1) peilikuva **(a)** x-akselin, **(b)** y-akselin, **(c)** suoran $y = x$ suhteen?

2. Mikä on pisteen (2, 1) projektio **(a)** x-akselilla, **(b)** y-akselilla?

1 Lineaarikuvaus

Esimerkki 1. Tarkastelemme *vektorimuuttujan vektoriarvoista funktiota* F, jolle $F(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Jokaista tason vektoria $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vastaa tason vektori $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}$.

Esimerkiksi $F(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Yleisesti sanomme, että funktio eli kuvaus

$$F(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

on *matriisin* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *välittämä tason lineaarikuvaus*. Merkitsemällä $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ voimme esittää tämän lineaarikuvauksen myös muodossa $F(X) = AX$.

Olkoon $X, Y \in \mathbf{R}^2$ ja $c \in \mathbf{R}$. Tällöin $F(X + Y) = A(X + Y) = AX + AY = F(X) + F(Y)$ ja $F(cX) = A(cX) = cAX = cF(X)$. Siis F toteuttaa *lineaarisuusehdot*

(L_1) Kaikilla $X, Y \in \mathbf{R}^2$ on $F(X + Y) = F(X) + F(Y)$.

(L_2) Kaikilla $X \in \mathbf{R}^2$, $c \in \mathbf{R}$ on $F(cX) = cF(X)$.

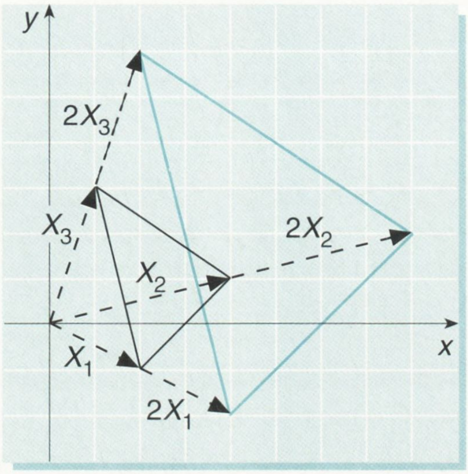
Kääntäen voidaan todistaa, että jos tason kuvaus F toteuttaa lineaarisuusehdot, niin on olemassa sellainen 2×2-matriisi A, että $F(X) = AX$.

Esimerkki 2. **(a)** Osoita, että tason kuvaus $F(X) = 2X$ on lineaarinen. **(b)** Mikä matriisi välittää tämän kuvauksen? **(c)** Mikä on tämän kuvauksen geometrinen merkitys?

(a) $F(X + Y) = 2(X + Y) = 2X + 2Y = F(X) + F(Y)$,
$F(cX) = 2(cX) = c(2X) = cF(X)$.

(b) $F(X) = 2X = (2I)X$, joten kuvauksen välittää matriisi $2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) Jokaisen vektorin pituus tulee kaksinkertaiseksi ja suunta säilyy. Siis tämä kuvaus on tason *venytys* origon suhteen niin, että etäisyydet origosta tulevat kaksinkertaisiksi. Esimerkiksi origokeskinen 1-säteinen ympyrä kuvautuu origokeskiseksi 2-säteiseksi ympyräksi. Kaikki muutkin etäisyydet tulevat kaksinkertaisiksi, joten kysymyksessä on *yhdenmuotoisuuskuvaus mittakaavassa 2* (MT 3, s. 159).



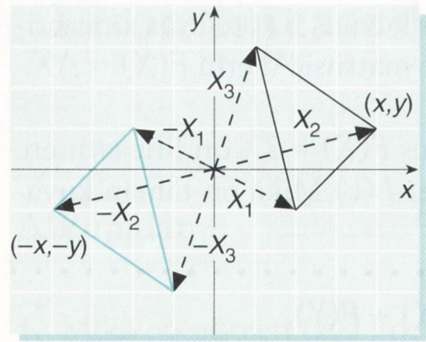
2 Peilaus origon ja koordinaattiakselien suhteen

Pisteen (x, y) peilikuvapiste origon suhteen on $(-x, -y)$. Toisin sanoen vektorin $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ peilikuva origon suhteen on vektori $-X = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$.

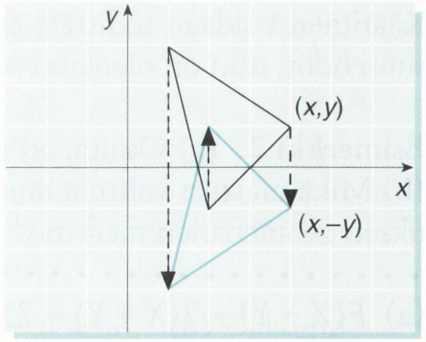
Koska

$$-X = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

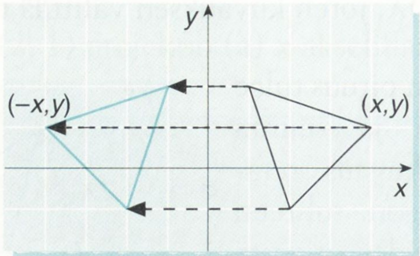
niin matriisi $-I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ välittää tason peilauksen origon suhteen.



Peilaus origon suhteen



Peilaus x-akselin suhteen



Peilaus y-akselin suhteen

Pisteen (x, y) peilikuva x-akselin suhteen on $(x, -y)$ ja y-akselin suhteen $(-x, y)$. Koska

$$\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

niin matriisi $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ välittää peilauksen x-akselin suhteen ja matriisi $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ peilauksen y-akselin suhteen.

Nämä peilaukset ovat *yhtenevyyskuvauksia*, sillä kaikki etäisyydet säilyvät.

3 Homotetia

Olemme kohdan 1 esimerkissä 2 todenneet, että matriisi $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ välittää tason venytyksen origon suhteen mittakaavassa 2. Yleisesti matriisi $H = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, missä $a \neq 0$, välittää tason venytyksen origon suhteen, jos $a > 1$, ja kutistuksen, jos $0 < a < 1$. Jos $a < 0$, niin venytykseen tai kutistukseen yhdistetään peilaus origon suhteen. Tapausta $a = 1$ vastaa identtinen kuvaus ja tapausta $a = -1$ pelkkä peilaus origon suhteen. Sanomme matriisin H välittämää kuvausta tason *homoteettiseksi* kuvaukseksi eli *homotetiaksi*. Se on yhdenmuotoisuuskuvaus mittakaavassa $|a|$.

Esimerkki. Mikä geometrinen merkitys on (i) matriisin H, (ii) käänteismatriisin H^{-1} välittämällä lineaarikuvauksella, kun

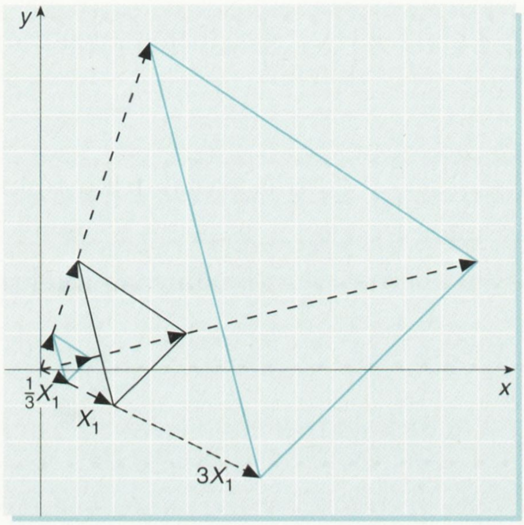
(a) $H = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, **(b)** $H = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$?

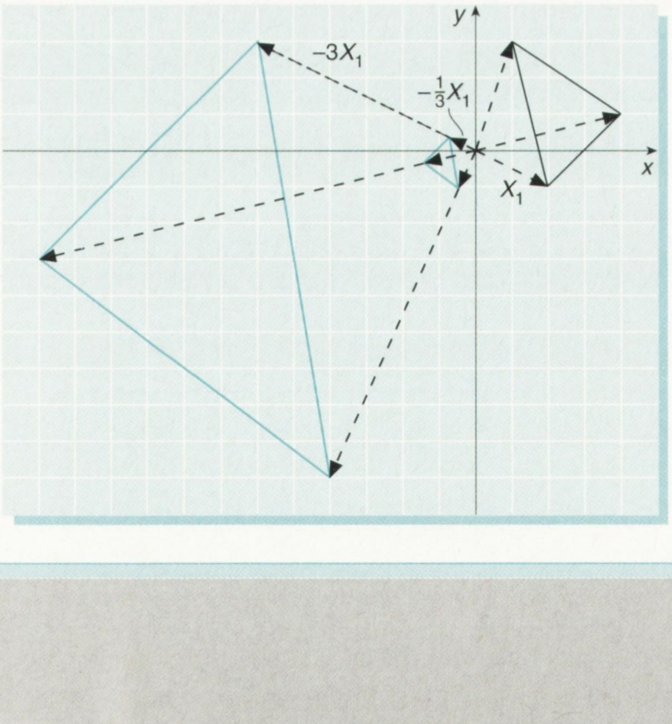
(a) (i) Venytys mittakaavassa 3.

(ii) $H^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ välittää kutistuksen mittakaavassa $\frac{1}{3}$.

(b) (i) Venytys mittakaavassa 3 ja peilaus origon suhteen.

(ii) $H^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ välittää kutistuksen mittakaavassa $\frac{1}{3}$ ja peilauksen.





4 Projektiokuvaus

Olemme (s. 120) osoittaneet, että tason vektorin X projektio yksikkövektorin U virittämälle suoralle on $Y = (X \cdot U)U$. Laskulakien perusteella on edelleen

$$Y = U(X \cdot U) = U(U \cdot X) = U(U^{T}X) = (UU^{T})X.$$

Projektiokuvaus, joka kuvaa vektorin X projektioksi Y, on siis lineaarikuvaus, jonka välittää matriisi

$$P = UU^{T}.$$

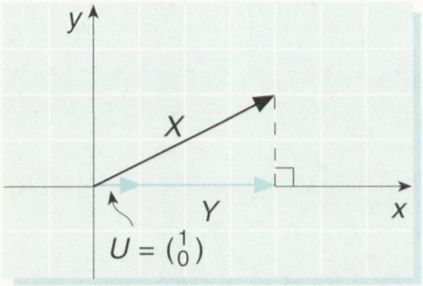
Esimerkki 1. Muodosta projektiokuvauksen matriisi tapauksessa

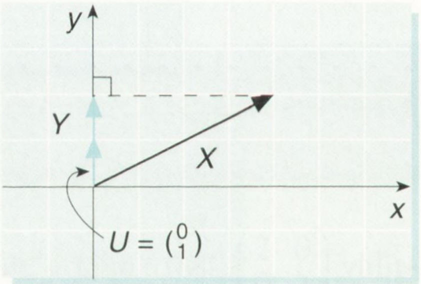
(a) $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, (b) $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, (c) $U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Mille suoralle projisointi tapahtuu?

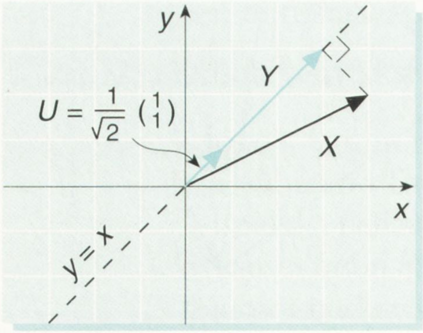
(a) $P = UU^{T} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ välittää projektiokuvauksen x-akselille (= span $\{U\}$).

(b) $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ välittää projektiokuvauksen y-akselille.

(c) $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ välittää projektiokuvauksen suoralle $y = x$.





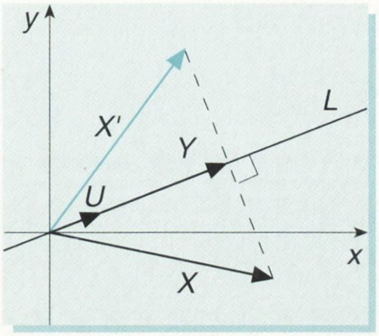


5 Peilaus suoran suhteen

Olemme edellä tutkineet tason peilausta koordinaattiakselien suhteen. Tarkastelemme nyt yleisesti tason peilausta sen origon kautta kulkevan suoran L suhteen, jonka virittää yksikkövektori U. Olkoon Y vektorin X projektio suoralle L. Tällöin $Y = UU^TX$, joten X:n peilikuva L:n suhteen on

$$X' = X + 2(Y - X) = 2Y - X = 2UU^TX - X = (2UU^T - I)X,$$

ks. kuvio.



Peilauksen välittää siis matriisi

$$R = 2UU^T - I.$$

Peilaus on yhtenevyyskuvaus.

Esimerkki. Määritä pisteen (4, 2) peilikuva suoran $y = 2x$ suhteen.

Suoran $y = 2x$ virittää yksikkövektori $U = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, joten peilauksen välittää matriisi

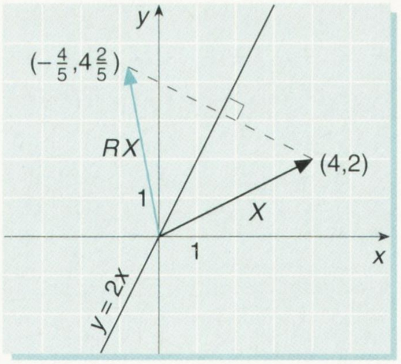
$$\begin{aligned} R &= 2UU^T - I = 2\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & 4\\4 & 8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3 & 4\\4 & 3\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pisteen (4, 2) paikkavektori $X = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ kuvautuu vektoriksi

$$RX = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3 & 4\\4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-4\\22\end{pmatrix},$$

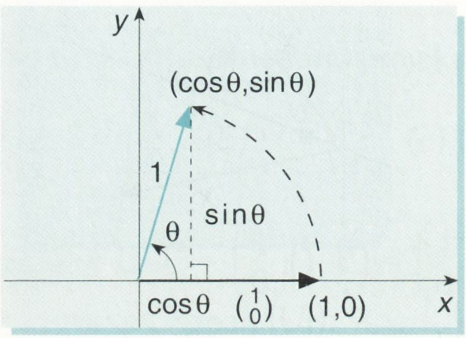
joten kysytty peilikuvapiste on

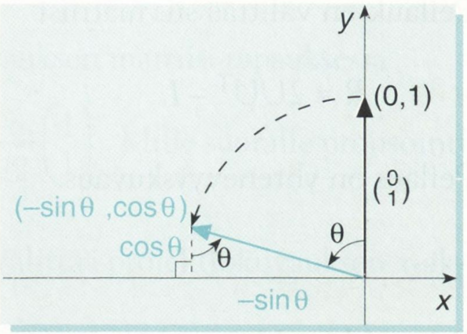
$$\left(-\frac{4}{5}, 4\frac{2}{5}\right).$$

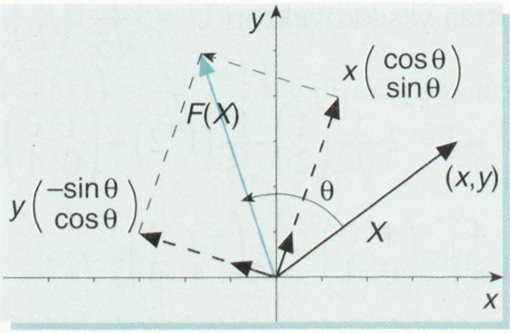


6 Kierto

Tarkastelemme tason *kiertoa* kulman θ verran origon ympäri *positiiviseen kiertosuuntaan* eli vastapäivään. Toisin sanoen tarkastelemme tason kuvausta F, joka laki on $F(X)$ = se vektori, joka saadaan kiertämällä X tällä tavalla. Kantavektorit $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ kuvautuvat kuvion mukaisesti vektoreiksi $\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$.







Geometrisesti voidaan päätellä, että kuvaus on lineaarinen, joten

$$F\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = F\left(x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = xF\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) + yF\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$= x\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\cos\theta - y\sin\theta\\ x\sin\theta + y\sin\theta\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

Siis kierron välittää matriisi

$$K = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Kierto on yhtenevyyskuvaus.

Esimerkki. Taso kierretään kulman 30° verran origon ympäri. Mikä on pisteen (2, 2) kuvapiste?

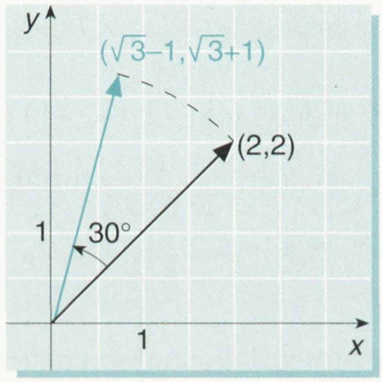
Koska

$$K = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

ja

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\sqrt{3}-2 \\ 2+2\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}-1 \\ \sqrt{3}+1 \end{pmatrix},$$

niin kysytty kuvapiste on $\left(\sqrt{3}-1, \sqrt{3}+1\right) \approx (0{,}73,\ 2{,}73)$.



Harjoitustehtäviä

156. Onko F lineaarikuvaus, kun F kuvaa vektorin $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vektoriksi

(a) $F(X) = -X$, (b) $F(X) = \begin{pmatrix} x \\ y+1 \end{pmatrix}$, (c) $F(X) = \begin{pmatrix} 4x \\ 3y \end{pmatrix}$,
(d) $F(X) = \begin{pmatrix} x \\ xy \end{pmatrix}$?

157. Olkoon F lineaarikuvaus, jolle $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ ja $F(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Osoita, että kuvauksen F matriisi on $\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$.

158. Määritä lineaarikuvauksen F matriisi, kun F kuvaa vektorin $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vektoriksi

(a) $F(X) = \begin{pmatrix} -4x \\ 5y \end{pmatrix}$, (b) $F(X) = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$,

(c) $F(X) = \begin{pmatrix} 3x + 5y \\ -2x + 7y \end{pmatrix}$.

159. Kolmion kärjet ovat (1,2), (–2,–1) ja (2,–2). Miten tämä kolmio kuvautuu matriisin $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ välittämässä homotetiassa, kun

(a) $a = 2$, (b) $a = -\frac{1}{2}$?

160. Muodosta projektiokuvauksen matriisi ja laske pisteen (2,0) projektio vektorin X määräämälle origon kautta kulkevalle suoralle, kun

(a) $X = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, (b) $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, (c) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

161. Olkoon $\|U\| = 1$. Osoita, että tason projektiokuvauksen matriisille $P = UU^{\mathrm{T}}$ on voimassa

(a) P on symmetrinen eli $P^{\mathrm{T}} = P$,
(b) P on *idempotentti* eli $P^2 = P$.

162. Määritä
(a) pisteen $(-1,2)$ peilikuva suoran $y = -\frac{1}{2}x$ suhteen,
(b) pisteen (x,y) peilikuva suoran $y = x$ suhteen.

163. Taso kierretään origon ympäri kulman φ verran. Määritä kierron matriisi sekä laske pisteiden P_1 ja P_2 kuvapisteet, kun
(a) $\varphi = 30°$, $P_1 = (0,1)$ ja $P_2 = (\sqrt{3},1)$,
(b) $\varphi = 90°$, $P_1 = (1,0)$ ja $P_2 = (3,4)$,
(c) $\varphi = 120°$, $P_1 = (\sqrt{3},0)$ ja $P_2 = (1,1)$,
(d) $\varphi = 180°$, $P_1 = (1,2)$ ja $P_2 = (-2,0)$.

164. Millaisen kuvauksen (kierto, peilaus vai jokin muu) välittää matriisi

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(c) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, (d) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$?

165. Olkoon $U \in \mathbf{R}^2$ yksikkövektori. Osoita, että peilausmatriisi $R = 2UU^T - I$ on
(a) symmetrinen eli $R^T = R$,
(b) ortogonaalinen eli $R^T = R^{-1}$,
(c) *unipotentti* eli $R^2 = I$.

166. Määritä pisteen $(1,2)$ (a) projektio suoralle $2x + 3y = 6$,
(b) peilikuva suoran $2x + 3y = 6$ suhteen.

167. (a) Osoita, että kiertomatriisi $K = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ on ortogonaalinen.
(b) Määritä K^{-1} ja tulkitse tulos geometrisesti.

168. Origon kautta kulkevan suoran suuntakulma on θ. Muodosta matriisi, joka välittää tason peilauksen tämän suoran suhteen.

Tutkimustehtävä: *Vektorin projektio tasolle*

(a) Olkoon T origon kautta kulkeva $\mathbf{R}^3$:n taso. Osoita, että jokainen vektori $X \in \mathbf{R}^3$ voidaan esittää yksikäsitteisesti muodossa $X = Y + Z$, missä $Y \in T$ ja $Z \perp T$. Vektoria Y sanotaan *vektorin X projektioksi tasolle T* ja vektoria $Z = X - Y$ vektorin X *normaalikomponentiksi*.

(b) Määritä vektorin $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ projektio ja normaalikomponentti tasolle $x - z = 0$.

(c) Olkoot U ja V tason T ortonormaalit virittäjävektorit. (Siis $U \in T$, $V \in T$, $\|U\| = \|V\| = 1$, $U^T V = 0$). Esitä projektion välittävän kuvauksen matriisi näiden vektoreiden avulla.

Tutkimustehtävä: *Tason kierto*

Tarkoittakoon $K(\theta)$ tason kiertomatriisia origon ympäri, kun kiertokulma on θ.

(a) Esitä matriisi $K(\alpha + \beta)$ matriisien $K(\alpha)$ ja $K(\beta)$ avulla.

(b) Johda tällä perusteella sinin ja kosinin yhteenlaskukaavat.

(c) Osoita, että tason kierto origon ympäri voidaan esittää kahden peilauksen yhdistettynä kuvauksena origon kautta kulkevien suorien suhteen.

4 OMINAISARVOT JA OMINAISVEKTORIT

4.1 Ominaisarvoprobleema

Alkupalat
1 Homogeeninen yhtälöpari
2 Ominaisvektorit
3 Ominaisarvot
4 Ominaisarvoyhtälö ja karakteristinen yhtälö
5 Ominaisvektorikanta
✎ Harjoitustehtäviä
Tutkimustehtävä: Diagonalisointi
Tutkimustehtävä: Toisen asteen käyrien pääakseliprobleema
Tutkimustehtävä: Determinantti
Tutkimustehtävä: Ominaisarvoprobleema $n \times n$-matriiseille

4.2 Dynaamisia systeemejä

Alkupalat
1 Markovin ketjun stabiilius
2 Leslien ikäjakaumamalli
3 Saalistaja-saalis-malli
✎ Harjoitustehtäviä
Tutkimustehtävä: Leslien malli useammalle ikäryhmälle
Tutkimustehtävä: Viirupöllöt

4.1 Ominaisarvoprobleema

Alkupalat

1. Osoita, että yhtälöryhmällä $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ei ole muita ratkaisuja kuin triviaali ratkaisu $x = y = 0$. Toisin sanoen osoita, että matriisin $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ välittämässä tason lineaarikuvauksessa mikään nollavektorista eroava vektori ei kuvaudu itselleen.

2. Jatkoa.
(a) Osoita, että löytyy sellainen nollavektorista eroava vektori, jolle $AX = 4X$. Toisin sanoen osoita, että yhtälöryhmällä $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on ei-triviaali ratkaisu. **(b)** Kuinka monta tällaista ratkaisua on olemassa?

1 Homogeeninen yhtälöpari

Olemme aiemmin (s. 74) selvittäneet kysymyksen lineaarisen homogeenisen yhtälöryhmän ratkaisujen lukumäärästä. Kertaamme aluksi tämän asian kahden tuntemattoman yhtälöparin tapauksessa.

Esimerkki. Tutki kerroinmatriisin asteen avulla, onko yhtälöparilla

(a) $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 2x + 6y = 0, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 2x - 6y = 0 \end{cases}$

muitakin ratkaisuja kuin triviaali ratkaisu.

(a) Kerroinmatriisin $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ aste 2 on sama kuin tuntemattomien lukumäärä, joten muita ratkaisuja kuin triviaali ratkaisu ei ole.

(b) Kerroinmatriisin $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ aste 1 on pienempi kuin tuntemattomien lukumäärä 2, joten ei-triviaaleja ratkaisuja on olemassa.

Tutkimme nyt yleisesti yhtälöparia

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0. \end{cases}$$

Jos $a = c = 0$, niin tällä yhtälöparilla on ei-triviaali ratkaisu $x = t$, $y = 0$, missä $t \neq 0$ on mielivaltainen. Jos taas $a \neq 0$ tai $c \neq 0$, niin voimme (tarvittaessa yhtälöiden järjestystä vaihtamalla) sopia, että $a \neq 0$. Tällöin

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{bc}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{ad - bc}{a} \end{pmatrix}.$$

(Rivioperaatio: $-\frac{c}{a}$.)

Ei-triviaaleja ratkaisuja löytyy, jos ja vain jos rank $A < 2$, mikä tapahtuu, jos ja vain jos $ad - bc = 0$. Näin olemme todistaneet seuraavan lauseen.

Yhtälöparilla

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$$

on ei-triviaaleja ratkaisuja, jos ja vain jos $ad - bc = 0$.

2 Ominaisvektorit

Tarkastelemme matriisin $A \in \mathbf{R}^{2\times 2}$ välittämää tason lineaarikuvausta. Osoittautuu tärkeäksi tutkia sellaisia vektoreita, joiden suunta säilyy tässä kuvauksessa tai muuttuu vastakkaiseksi. Sanomme, että nollavektorista eroava vektori $X \in \mathbf{R}^2$ on matriisin A *ominaisvektori*, jos AX ja X ovat yhdensuuntaisia eli jos AX saadaan kertomalla X sopivalla reaaliluvulla.

Esimerkki 1. Onko vektori **(a)** $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, **(b)** $Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, **(c)** $Z = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ matriisin $A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ominaisvektori?

(a) $AX = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3X$, joten AX ja X ovat samansuuntaisia ja siis yhdensuuntaisia. Siksi X on A:n ominaisvektori.

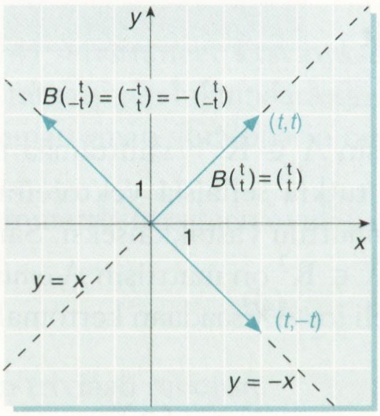
(b) Vektoria $AY = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ ei saada kertomalla vektori $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ reaaliluvulla (miksei?), joten Y ei ole A:n ominaisvektori.

(c) $AZ = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = -2Z$, joten AZ ja Z ovat vastakkaissuuntaisia ja siis yhdensuuntaisia. Siksi Z on A:n ominaisvektori.

Esimerkki 2. Määritä geometrisella tarkastelulla matriisin
(a) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, **(b)** $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ kaikki ominaisvektorit.

(a) Koska $B = 2UU^T - I$, missä $U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, niin B välittää tason peilauksen suoran $y = x$ suhteen ks. s. 129.

Suoran $y = x$ vektorit eivät muutu tässä peilauksessa, joten ne ovat (nollavektoria lukuunottamatta) ominaisvektoreita. Suoran $y = -x$ (nollavektorista eroavien) vektorien suunta muuttuu vastakkaiseksi, joten nekin ovat ominaisvektoreita. Minkään muun vektorin peilikuva ei ole yhdensuuntainen alkuperäisen vektorin kanssa, joten muut vektorit eivät ole ominaisvektoreita. Siis B:n ominaisvektoreita ovat kaikki vektorit $\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}$, missä $t \neq 0$, ja vain ne.



(b) Matriisi C välittää tason kierron kulman 90° verran origon ympäri, sillä

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{pmatrix},$$ ks. s. 131.

Minkään (nollavektorista eroavan) vektorin suunta ei täten pysy samana eikä tule vastakkaiseksi. Siis C:llä ei ole (reaalisia) ominaisvektoreita.

3 Ominaisarvot

Olkoon $X \in \mathbf{R}^2$ matriisin $A \in \mathbf{R}^{2\times 2}$ ominaisvektori. Tällöin vektori AX saadaan kertomalla vektori X tietyllä reaaliluvulla λ (lambda), jota sanomme ominaisvektoria X vastaavaksi matriisin A *ominaisarvoksi*. Siis $AX = \lambda X$.

Esimerkki 1. Palaamme edellisen kohdan esimerkkiin 1.

(a) Matriisin $A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ominaisvektoria $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ vastaa ominaisarvo $\lambda = 3$, sillä $AX = 3X$. Sanomme myös, että X on ominaisarvoa $\lambda = 3$ vastaava ominaisvektori. Kaikki muotoa tX $(t \neq 0)$ olevat vektorit ovat ominaisarvoa $\lambda = 3$ vastaavia ominaisvektoreita, sillä $A(tX) = tAX = t\,3X = 3(tX)$.

(b) Matriisilla A on ominaisarvona myös $\lambda = -2$ ja vastaavana ominaisvektorina on $Z = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, sillä $AZ = -2Z$. Kaikki vektorit tZ $(t \neq 0)$ ovat ominaisarvoa $\lambda = -2$ vastaavia ominaisvektoreita.

Esimerkki 2. Palaamme edellisen kohdan esimerkkiin 2.

(a) Vektorit $\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$, missä $t \neq 0$, ovat matriisin $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ominaisarvoa 1 vastaavia ominaisvektoreita, sillä $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$. Vastaavasti vektorit $\begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix}$ ovat B:n ominaisarvoa -1 vastaavia ominaisvektoreita, sillä $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix}$.

(b) Koska matriisilla $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ei ole (reaalisia) ominaisvektoreita, sillä ei voi myöskään olla (reaalisia) ominaisarvoja.

4 Ominaisarvoyhtälö ja karakteristinen yhtälö

Jos λ (lambda) on matriisin A ominaisarvo ja X on vastaava ominaisvektori, niin on voimassa *ominaisarvoyhtälö*

$$AX = \lambda X.$$

Voimme nyt muotoilla *ominaisarvoprobleeman* seuraavasti.

Määritettävä sellaiset reaaliluvut λ, että ominaisarvoyhtälöllä $AX = \lambda X$ on ei-triviaali ratkaisu X. Nämä luvut λ ovat matriisin A ominaisarvoja. Vastaavat ei-triviaalit ratkaisut X ovat matriisin A ominaisvektoreita.

Ratkaisemme yleisen 2×2-matriisin $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ominaisarvoprobleeman. Ominaisarvoyhtälö

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

on yhtälöparina

$$\begin{cases} ax + by = \lambda x \\ cx + dy = \lambda y \end{cases}$$

eli

$$\begin{cases} (a-\lambda)x + \quad by = 0 \\ \quad cx + (d-\lambda)y = 0. \end{cases}$$

Kohdan 1 mukaan tällä on ei-triviaali ratkaisu, jos ja vain jos

$$(a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0$$

eli

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0,$$

jota kutsumme matriisin A *karakteristiseksi yhtälöksi*. Siis ominaisarvoprobleema voidaan ratkaista seuraavasti.

Ominaisarvoprobleeman ratkaiseminen

1. Ratkaistaan karakteristinen yhtälö, jolloin saadaan ominaisarvot.
2. Sijoitetaan ominaisarvot ominaisarvoyhtälöön ja ratkaistaan se, jolloin saadaan ominaisvektorit.

Esimerkki. Ratkaise matriisin **(a)** $A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, **(b)** $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, **(c)** $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ominaisarvoprobleema.

Olemme edellisissä esimerkeissä käsitelleet a-kohtaa "arvaamalla" sekä b- ja c-kohdat geometrisesti. Ratkaisemme tämän tehtävän nyt algebrallisesti.

(a) *Ominaisarvot.* Karakteristisen yhtälön $\lambda^2 - (0+1)\lambda + 0 \cdot 1 - 1 \cdot 6 = 0$ eli $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$ ratkaisut ovat $\lambda_1 = 3$ ja $\lambda_2 = -2$.

Ominaisarvoa $\lambda_1 = 3$ *vastaavat ominaisvektorit.* Sijoittamalla ominaisarvoyhtälöön $\lambda = 3$ saamme $\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ eli yhtälöparin $6y = 3x$, $x + y = 3y$, joka sievenee yhtälöksi $x = 2y$. Siis $y = t$ voidaan valita mielivaltaisesti, jolloin $x = 2t$. Ominaisvektorit ovat täten $\begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}$, missä $t \neq 0$.

Ominaisarvoa $\lambda_2 = -2$ *vastaavat ominaisvektorit.* Ominaisarvoyhtälö on nyt $\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (-2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Yhtälöpari $6y = -2x$, $x + y = -2y$ sievenee yhtälöksi $x = -3y$, jonka ratkaisu $x = -3t$, $y = t$. Ominaisvektorit ovat täten $\begin{pmatrix} -3t \\ t \end{pmatrix}$, missä $t \neq 0$.

(b) Karakteristinen yhtälö on $\lambda^2 - (0+0)\lambda + 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = 0$ eli $\lambda^2 - 1 = 0$, joten $\lambda = \pm 1$.

Sijoittamalla $\lambda = 1$ saamme $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ eli $y = x$, $x = y$, jonka ratkaisu on $x = t$, $y = t$. Siis vastaavat ominaisvektorit ovat $\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$, missä $t \neq 0$.

Sijoittamalla $\lambda = -1$ saamme $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ eli $y = -x$, $x = -y$, joten $x = -t$, $y = t$. Siis vastaavat ominaisvektorit ovat $\begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix}$, missä $t \neq 0$.

(c) Karakteristisella yhtälöllä $\lambda^2 - (0+0)\lambda + 0 \cdot 0 - 1(-1) = 0$ eli $\lambda^2 + 1 = 0$ ei ole reaalisia ratkaisuja. Siis myöskään ominaisarvoprobleemalla ei ole reaalisia ratkaisuja.

5 Ominaisvektorikanta

Olkoot matriisin $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ominaisarvot λ_1 ja λ_2 reaalisia ja erisuuria. Olkoon X_1 ominaisarvoa λ_1 ja X_2 ominaisarvoa λ_2 vastaava ominaisvektori. Osoitamme, että vektorit X_1 ja X_2 ovat lineaarisesti riippumattomia. Teemme vastaoletuksen, että ne ovat lineaarisesti riippuvia, jolloin on olemassa ei-triviaali lineaarikombinaatio

(1) $\quad c_1X_1 + c_2X_2 = O.$

Tarvittaessa järjestystä vaihtamalla voimme sopia, että $c_2 \neq 0$. Kertomalla yhtälön (1) λ_1:llä saamme

(2) $\quad c_1\lambda_1X_1 + c_2\lambda_1X_2 = O.$

Seuraavaksi kerromme yhtälön (1) vasemmalta A:lla. Koska $AX_1 = \lambda_1X_1$ ja $AX_2 = \lambda_2X_2$, niin tulos on

(3) $\quad c_1\lambda_1X_1 + c_2\lambda_2X_2 = O.$

Vähentämällä yhtälöstä (2) yhtälön (3) joudumme ristiriitaan

$$c_2(\lambda_1 - \lambda_2)X_2 = O,$$

sillä $c_2 \neq 0$, $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ ja ominaisvektorina $X_2 \neq O$. Vastaoletus on siis väärä.

Voimme täten muodostaa A:n ominaisvektoreista avaruuden $\mathbf{R}^2$ kannan ottamalla siihen kumpaakin ominaisarvoa vastaavan ominaisvektorin.

Esimerkki. (i) Osoita tutkimalla ominaisarvoja, että matriisin **(a)** $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, **(b)** $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ ominaisvektoreista voidaan muodostaa avaruuden $\mathbf{R}^2$ kanta. (ii) Määritä jokin tällainen kanta.

(a) (i) Karakteristinen yhtälö on $\lambda^2 - (3 + 0)\lambda + 3 \cdot 0 - (-1)2 = 0$ eli $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, joten matriisilla on kaksi erisuurta ominaisarvoa $\lambda_1 = 2$ ja $\lambda_2 = 1$. Täten mikä tahansa ominaisarvoa λ_1 vastaava ominaisvektori ja mikä tahansa ominaisarvoa λ_2 vastaava ominaisvektori muodostavat kannan.

(ii) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow 3x + 2y = 2x, -x = 2y \Leftrightarrow x + 2y = 0,$
joten ominaisarvoa $\lambda_1 = 2$ vastaavat ominaisvektorit ovat
$X_1 = \begin{pmatrix} -2t \\ t \end{pmatrix}$, missä $t \neq 0$.

$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow 3x + 2y = x, -x = y \Leftrightarrow x + y = 0$, joten ominaisarvoa $\lambda_2 = 1$ vastaavat ominaisvektorit ovat $X_2 = \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix}$, missä $t \neq 0$.

Saamme kysytyn kannan sijoittamalla X_1:n ja X_2:n lausekkeisiin t:lle minkä tahansa arvon. Valitsemme molemmissa $t = 1$, jolloin kannaksi tulee $\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

(b) (i) $\lambda^2 - (2 - 6)\lambda + 2(-6) - 3 \cdot 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 4\lambda - 21 = 0$, josta $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -7$. Siis ominaisarvot ovat erisuuria. Jatkamme kuten a-kohdassa.

(ii) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2x + 3y = 3x, 3x - 6y = 3y \Leftrightarrow x - 3y = 0,$

joten $X_1 = \begin{pmatrix} 3t \\ t \end{pmatrix}$, $t \neq 0$;

$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (-7)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2x + 3y = -7x, 3x - 6y = -7y \Leftrightarrow 3x + y = 0,$

joten $X_2 = \begin{pmatrix} t \\ -3t \end{pmatrix}$, $t \neq 0$.

Eri ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit ovat tässä tapauksessa toisiaan vastaan kohtisuorassa, sillä vektorien $X_1 = \begin{pmatrix} 3r \\ r \end{pmatrix}$ ja $X_2 = \begin{pmatrix} s \\ -3s \end{pmatrix}$ sisätulo $X_1 \cdot X_2 = 3rs + r(-3s) = 0$. Valitsemalla $r = s = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ saamme ominaisvektorien pituuksiksi 1, jolloin meillä on *ortonormaali ominaisvektorikanta* $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}$.

Harjoitustehtäviä

169. Onko yhtälöparilla

(a) $x + 2y = 0,\ 3x + 4y = 0$, (b) $\begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

ei-triviaaleja ratkaisuja?

170. Määritä sellainen a, että yhtälöparilla

(a) $6x - y = 0,\ 3x + ay = 0$, (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 1-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

on ei-triviaaleja ratkaisuja.

171. Onko vektori X matriisin A ominaisvektori, kun

(a) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$, (b) $X = \begin{pmatrix} -1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$?

172. Onko luku λ matriisin A ominaisarvo, kun

(a) $\lambda = 2$, $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$, (b) $\lambda = -2$, $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$?

173. Määritä matriisin

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

ominaisarvot ja ominaisvektorit.

174. Voidaanko matriisin

(a) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

ominaisvektoreista muodostaa avaruuden $\mathbf{R}^2$ (i) kanta, (ii) ortonormaali kanta? Myönteisessä tapauksessa muodosta se.

175. (i) Määritä matriisin (a) $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ominaisarvot ja ominaisvektorit.

(ii) Voidaanko ominaisvektoreista muodostaa avaruuden $\mathbf{R}^2$ kanta? Entä ortonormaali kanta?

176. Muodosta sellainen matriisi, $A \in \mathbf{R}^{2\times 2}$, jonka

(a) ominaisarvot = 0, mutta $A \neq O$,

(b) ominaisarvot = 1, mutta $A \neq I$.

(c) Voidaanko A:n ominaisvektoreista muodostaa avaruuden $\mathbf{R}^2$ kanta?

177. Jos tunnetaan matriisin $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ominaisarvot ja ominaisvektorit, niin miten saadaan matriisin **(a)** A^2, **(b)** A^p ($p \in \mathbf{Z}_+$) ominaisarvot ja ominaisvektorit? Ohje: Kerro ominaisarvoyhtälö $AX = \lambda X$ sopivasti.

178. Jos tunnetaan kääntyvän matriisin $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ominaisarvot ja ominaisvektorit, niin miten saadaan matriisin A^{-1} ominaisarvot ja ominaisvektorit?

179. Jos tunnetaan matriisin $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ominaisarvot ja ominaisvektorit, niin miten saadaan matriisin $A + I$ ominaisarvot ja ominaisvektorit?

180. Todista: Symmetrisen matriisin $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$
(a) ominaisarvot ovat reaaliset,
(b) eri ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa.

181. Oletetaan, että matriisin $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ kaikki alkiot ovat ei-negatiivisia. Osoita, että tämän matriisin ominaisarvot ovat reaaliset.

182. Olkoon $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
(a) Osoita, että matriisien A ja A^T ominaisarvot ovat samat.
(b) Ovatko näiden matriisien ominaisvektorit samat?

183. Olkoon $A, B \in \mathbf{R}^{2\times 2}$ ja olkoon B kääntyvä.
(a) Osoita, että matriisien AB ja BA ominaisarvot ovat samat.
(b) Ovatko näiden matriisien ominaisvektorit samat?

184. Matriisi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on *idempotentti*, jos $A^2 = A$, *unipotentti*, jos $A^p = I$ jollakin $p \in \mathbf{Z}_+$, ja *nilpotentti*, jos $A^p = O$ jollakin $p \in \mathbf{Z}_+$. Mitä voidaan sanoa **(a)** idempotentin, **(b)** unipotentin, **(c)** nilpotentin matriisin ominaisarvoista?

Tutkimustehtävä: *Diagonalisointi*

Olkoot matriisin $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ominaisarvot λ_1 ja λ_2 $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ sekä olkoot X_1 ja X_2 vastaavat ominaisvektorit.

(a) Osoita, että matriisi $S = (X_1\ X_2)$ on kääntyvä. Ohje: Vektorit X_1 ja X_2 ja ovat lineaarisesti riippumattomia.

(b) Todista, että $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Siksi sanomme, että A on *diagonalisoituva*.

(c) Tutki A:n diagonalisoituvuutta tapauksessa $\lambda_1 = \lambda_2$.

Tutkimustehtävä: *Toisen asteen käyrien pääakseliprobleema*

Ominaisarvoteoriaa ja erityisesti diagonalisointia voidaan soveltaa toisen asteen käyrän $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ *pääakseliprobleemaan*. Siis on selvitettävä tämän käyrän laatu (ellipsi, hyperbeli tai paraabeli taikka jokin niiden nk. surkastuma) ja pääakselien pituudet sekä niiden suunnat. Ota kirjallisuudesta selvää, miten tämä tehdään.

Tutkimustehtävä: *Determinantti*

Ota kirjallisuudesta selvää, miten määritellään neliömatriisin *determinantti* ja mikä yhteys determinantilla on lineaarisen homogeenisen yhtälöryhmän ei-triviaalien ratkaisujen olemassaoloon.

Tutkimustehtävä: *Ominaisarvoprobleema n×n-matriiseille*

Tutki (a) 3×3- (b) $n \times n$-matriisien ominaisarvoprobleemaa. Käytä kirjallisuutta apuna.

4.2 Dynaamisia systeemejä

Alkupalat

1. Tarkastellaan Markovin ketjua, jonka siirtymämatriisi
$P = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,03 & 0,97 \end{pmatrix}$ ja alkutilavektori $X_0 = (0{,}6 \quad 0{,}4)$. Määritä tilavektori **(a)** $X_1 = X_0P$, **(b)** $X_2 = X_1P$.

2. Jatkoa. Tiedetään, että tilavektori X_t lähestyy tiettyä rajavektoria, kun $t \to \infty$. Miten tämä rajavektori voidaan määrittää?

1 Markovin ketjun stabiilius

Olemme aiemmin (s. 30) maininneet ilman todistusta, että Markovin ketju on stabiili, jos sen siirtymämatriisin kaikki alkiot ovat > 0. Nyt voimme todistaa tämän väitteen kahden tilan ketjuille. Olkoon tällaisen ketjun siirtymämatriisi

$$P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix},$$

missä $0 < p < 1$ ja $0 < q < 1$. Olkoon edelleen X_t tämän ketjun tilavektori t siirroksen kuluttua, jolloin (s. 29)

$$X_t = X_{t-1}P = X_{t-2}P^2 = \ldots = X_0P^t.$$

Vaakavektorien sijasta on nyt mukavampi käsitellä pysytyvektoreita. Siksi tarkastelemme yhtälön $X_t = X_{t-1}P$ sijasta siitä transponoimalla saatua yhtälöä. Koska $(X_{t-1}P)^{\mathrm{T}} = P^{\mathrm{T}}X_{t-1}{}^{\mathrm{T}}$ (teht. 27), saamme merkitsemällä

$$Q = P^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} p & 1-q \\ 1-p & q \end{pmatrix}, \quad Y_t = X_t{}^{\mathrm{T}}$$

yhtälöt

$$Y_t = QY_{t-1} = Q^2Y_{t-2} = \ldots = Q^tY_0.$$

Matriisin Q ominaisarvot ovat $\lambda_1 = 1$ ja $\lambda_2 = p + q - 1$ (teht. 186). Meidän ei tässä vaiheessa tarvitse laskea vastaavia ominaisvektoreita, vaan riittää merkitä niitä U_1:lla ja U_2:lla. Koska $-1 < \lambda_2 < 1$ (teht. 186), niin $\lambda_1 \neq \lambda_2$, joten U_1 ja U_2 ovat lineaarisesti riippumattomia ja muodostavat siis avaruuden $\mathbf{R}^2$ kannan. Olkoon alkutilavektorin Y_0 esitys tässä kannassa

$$Y_0 = c_1U_1 + c_2U_2.$$

Voidaan todistaa (teht. 187), että $c_1 \neq 0$.

Koska $QU_1 = \lambda_1U_1 = U_1$ ja $QU_2 = \lambda_2U_2$, niin

$$Y_1 = QY_0 = Q(c_1U_1 + c_2U_2) = c_1QU_1 + c_2QU_2 = c_1U_1 + c_2\lambda_2U_2.$$

Vastaavasti

$$Y_2 = Q^2Y_0 = QY_1 = c_1U_1 + c_2\lambda_2^2U_2$$

ja yleisesti

$$Y_t = Q^tY_0 = c_1U_1 + c_2\lambda_2^tU_2.$$

Kun $t \to \infty$, niin $\lambda_2^t \to 0$ (teht. 186), joten $Q^tY_0 \to c_1U_1$. Tutkimamme Markovin ketju on siis todellakin stabiili ja sen tasapainovektori on matriisin Q ominaisarvoa 1 vastaava ominaisvektori. Se ehto, että tilavektorin alkioiden summa = 1, määrää kertoimen c_1.

Esimerkki. Olemme aiemmin (s. 29–30) tarkastelleet Markovin ketjua, jonka siirtymämatriisi $P = \begin{pmatrix} 0{,}96 & 0{,}04 \\ 0{,}01 & 0{,}99 \end{pmatrix}$. Tasapainovektori on matriisin $Q = P^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0{,}96 & 0{,}01 \\ 0{,}04 & 0{,}99 \end{pmatrix}$ ominaisarvoa 1 vastaava se ominaisvektori $Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, jonka alkioiden summa = 1. Näin saamme vektoriyhtälön $QY = Y$ eli yhtälöparin

$$\begin{cases} 0{,}96x_1 + 0{,}01x_2 = x_1 \\ 0{,}04x_1 + 0{,}99x_2 = x_2, \end{cases}$$

jonka olemme aiemmin (s. 30) ratkaisseet.

2 Leslien ikäjakaumamalli

Kuvitelkaamme, että erään primitiivisen heimon H jäsenet tulevat sukukypsiksi noin 20-vuotiaina ja elävät noin 40-vuotiaiksi. Kutsumme alle 20-vuotiasta H:laista "lapseksi" ja yli 20-vuotiasta "aikuiseksi". Olkoon a aikuisen naisen elinaikanaan synnyttämien tyttöjen keskimääräinen lukumäärä ja olkoon p todennäköisyys sille, että tyttölapsi elää aikuiseksi. Olkoon H:ssa tarkastelun alkaessa x_1 tyttöä ja x_2 aikuista naista, mitä kuvaa alkutilavektori

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

20 vuoden kuluttua tyttölapsia on ax_2 ja aikuisia naisia px_1, joten uusi tilavektori on

$$X_1 = \begin{pmatrix} ax_2 \\ px_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ p & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Määrittelemme *Leslien matriisin*

$$L = \begin{pmatrix} 0 & a \\ p & 0 \end{pmatrix}, \text{ jolloin } L^2 = ap\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tilavektori $X_1 = LX_0$ ilmoittaa tyttöjen ja naisten lukumäärät 20 vuoden kuluttua. Tilavektori

$$X_2 = LX_1 = L(LX_0) = L^2X_0 = apX_0$$

ilmoittaa tyttöjen ja naisten lukumäärät 40 vuoden kuluttua. Yleisesti tilavektori

$$X_{2t} = L^{2t}X_0 = (ap)^tX_0$$

ilmoittaa tilanteen $40t$ vuoden kuluttua. Matriisin L^2 ainoa ominaisarvo ap osoittaa H:n väkiluvun kehityksen. Jos $ap > 1$, niin väkiluku kasvaa eksponentiaalisesti eikä tasapainovektoria ole. Jos taas $(0 <)$ $ap < 1$, niin väkiluku vähenee eksponentiaalisesti eikä tasapainovektoria silloinkaan ole. Jos vihdoin $ap = 1$, niin väkiluku pysyy samana ja jokainen vektori on tasapainovektori. Palaamme tähän aiheeseen tehtävissä 190 ja 191 sekä tutkimustehtävissä.

Esimerkki. Missä ajassa H:n väkiluku kaksinkertaistuu, jos $a = 3$ ja $p = \frac{1}{2}$? Oletetaan, että poikia ja tyttöjä syntyy suunnilleen yhtä paljon.

Väkiluku kaksinkertaistuu naisten (siis tyttöjen ja aikuisten naisten) lukumäärän kaksinkertaistuessa. Jos naispuolisia H:laisia on alunperin N, niin $40t$ vuoden kuluttua heitä on $(ap)^t N = (\frac{3}{2})^t N$. Yhtälöstä $1{,}5^t N = 2N$ saamme $t = \dfrac{\log\ 2}{\log\ 1,5} \approx 1{,}710$. Vaikka muuttujan t arvot ovat mallissa kokonaislukuja, voimme soveltaa tätä mallia muillakin arvoilla, sillä kysymyksessä on joka tapauksessa likimääräismalli. Sen mukaan väkiluku kaksinkertaistuu $40\dfrac{\log\ 2}{\log\ 1,5} \approx 70$ vuoden kuluttua.

3 Saalistaja-saalis-malli

Kuvitelkaamme, että eräässä metsässä elää pöllöjä ja myyriä ja että pöllöt ovat myyrien merkittävin uhka. Olkoon metsässä alunperin p_0 pöllöä ja m_0 tuhatta myyrää sekä olkoot p_t ja m_t nämä lukumäärät t kuukauden kuluttua. Oletamme, että

$$\begin{cases} p_{t+1} = 0,5p_t + 0,4m_t \\ m_{t+1} = -0,104p_t + \ 1,1m_t \end{cases}$$

eli

$$\begin{pmatrix} p_{t+1} \\ m_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 \\ -0,104 & 1,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_t \\ m_t \end{pmatrix}.$$

Jos siis myyrät kuolevat sukupuuttoon $(m_t = 0)$, niin pöllöille löytyy muuta ravintoa niin vähän, että vain puolet niistä säilyy hengissä kuukauden. Tällöin pöllöjen lukumäärä vähenee eksponentiaalisesti. Jos taas pöllöt kuolevat sukupuuttoon $(p_t = 0)$, niin myyrien lukumäärä 1,1-kertaistuu kuukausittain ja siis kasvaa eksponentiaalisesti.

Merkitsemällä $X_t = \begin{pmatrix} p_t \\ m_t \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 \\ -0,104 & 1,1 \end{pmatrix}$ saamme tämän mallin muotoon $X_{t+1} = AX_t$. Matriisin A ominaisarvot ovat $\lambda_1 = 1{,}02$ ja $\lambda_2 = 0{,}58$ sekä vastaavat ominasvektorit $U_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \end{pmatrix}$ ja $U_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ (teht. 188). Esitämme alkutilavektorin ominaisvektorikannassa

$$X_0 = c_1U_1 + c_2U_2.$$

Nyt (vrt. s. 148)

$$\begin{aligned} X_t &= A^t X_0 = A^t(c_1U_1 + c_2U_2) = c_1A^tU_1 + c_2A^tU_2 \\ &= c_1\lambda_1^t U_1 + c_2\lambda_2^t U_2 = c_1\, 1{,}02^t U_1 + c_2\, 0{,}58^t U_2. \end{aligned}$$

Oletamme aluksi, että $c_1 \neq 0$. Suurilla t:n arvoilla $0{,}58^t \approx 0$, joten

$$X_{t+1} \approx c_1 1{,}02^{t+1} U_1 = 1{,}02\, c_1 1{,}02^t U_1 \approx 1{,}02 X_t.$$

Siis pitkän ajan kuluttua sekä pöllöjen että myyrien lukumäärät 1,02-kertaistuvat kuukausittain. Niiden lukumäärien suhde pysyy siis vakiona.

Näemme tämän suhteen ominaisvektorista $U_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \end{pmatrix}$. Siis pitkän ajan kuluttua jokaista kymmentä pöllöä kohti on 13 000 myyrää eli jokaista pöllöä kohti on 1 300 myyrää.

Lopuksi oletamme, että $c_1 = 0$. Tämä tapaus on erittäin harvinainen, koska silloin alkutilavektori saadaan ominaisarvoa $\lambda_2 = 0{,}58$ vastaavasta ominaisvektorista $U_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ eli viittä pöllöä kohti on alunperin ollut 1 000 myyrää. Tällöin $X_t \to O$, joten sekä pöllöt että myyrät kuolevat sukupuuttoon.

Markovin ketjut, Leslien ikäjakaumamallit ja saalistaja-saalis-mallit ovat esimerkkejä *diskreeteistä lineaarisista dynaamisista systeemeistä*.

Harjoitustehtäviä

185. Määritä Markovin ketjun tasapainovektori, kun siirtymämatriisi $P = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,03 & 0,97 \end{pmatrix}$ ja alkutilavektori $X_0 = (0{,}6\ 0{,}4)$.

186. **(a)** Todista: Matriisin $Q = \begin{pmatrix} p & 1-q \\ 1-p & q \end{pmatrix}$ ominaisarvot ovat $\lambda_1 = 1$ ja $\lambda_2 = p + q - 1$.

(b) Todista: Jos $0 < p < 1$ ja $0 < q < 1$, niin $-1 < \lambda_2 < 1$. Miksi $\lambda_2^t \to 0$, kun $t \to \infty$?

187. Jatkoa.

(a) Määritä matriisin Q ominaisvektorit.

(b) Tarkastellaan mielivaltaisen alkutilavektorin Y_0 esitystä $Y_0 = c_1U_1 + c_2U_2$ ominaisvektorikannassa $\{U_1, U_2\}$. Osoita, että $c_1 \neq 0$. Ohje: Jos $c_1 = 0$, niin Y_0 on ominaisarvoa λ_2 vastaava ominaisvektori (miksi?), mikä on mahdotonta (miksi?).

188. Määritä matriisin $\begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 \\ -0,104 & 1,1 \end{pmatrix}$ ominaisarvot ja ominaisvektorit.

189. Tarkastellaan kohdan 2 väestömallia seuraavasti muutettuna. Havainnot tehdään vuosittain. Seuraavana vuonna (i) a % aikuisista naisista synnyttää tyttövauvan, (ii) p % tyttölapsista säilyy hengissä ja pysyy lapsina, (iii) b % tyttölapsista säilyy hengissä ja varttuu aikuisiksi, (iv) q % aikuisista naisista säilyy hengissä.

(a) Muodosta väestön kehitystä kuvaava malli.

(b) Tutki tätä mallia valitsemalla parametreille a, p, b ja q jotkin sopivat arvot.

190. Jatkoa. Mainitse jotkin sellaiset parametrien a, p, b ja q arvot,

(a) joilla väkiluku (i) kasvaa, (ii) vähenee eksponentiaalisesti,

(b) joilla muodostettu malli ei ole mielekäs.

191. Tarkastellaan kohdan 3 saalistaja-saalis-mallia. Oletetaan, että metsässä on noin 100 pöllöä ja 100 000 myyrää. Kuinka paljon näitä eläimiä siellä on vuoden kuluttua?

192. Tutki saalistaja-saalis-mallia, kun siinä oleva kerroin –0,104 korvataan yleisellä kertoimella p (< 0).

Tutkimustehtävä: *Leslien malli useammalle ikäryhmälle*

Suunnittele Leslien malli, joka kuvaa Suomen väestön ikärakenteen kehitystä, mikäli olosuhteet pysyvät samoina. Miksi on syytä käyttää useampaa kuin kahta ikäryhmää? Laadi sopiva ryhmittely. Mallin parametrit voit keksiä itse. Jos haluat paremman tuloksen, voit käyttää väestötilastoja. Tutki saamaasi mallia kokeellisesti. Mitä sen mukaan tapahtuisi Suomen väestön ikärakenteelle pitkän ajan kuluttua?

Tutkimustehtävä: *Viirupöllö*

Viirupöllöllä (*strix occidentalis*) on kymmenen vuoden ajan ollut keskeinen rooli Yhdysvaltojen metsäteollisuuden ja luonnonsuojelijoiden välisessä kiistassa, joka koskee maan koillisosan suurten metsien hakkuutöitä. Luonnonsuojelijat väittivät, että siellä elävä viirupöllö on uhanalainen laji, kun taas teollisuus oli eri mieltä. Siksi asiaa alettiin tutkia tarkemmin. Huomattiin ensinnäkin, että viirupöllön elämä koostuu "poikasiästä" (0–1 v), "nuoruudesta" (1–2 v) ja "täysi-ikäisyydestä" (2–20 v). Lisäksi huomattiin, että tiettynä vuonna pöllökanta riippuu edellisen vuoden kannasta seuraavasti.

(i) Naaraspuolisten poikasten määrä = 33 % edellisen vuoden täysi-ikäisten naaraiden määrästä.
(ii) Nuorten naaraiden määrä = 18 % edellisen vuoden naaraspoikasten määrästä.
(iii) Täysi-ikäisten naaraiden määrä = 71 % edellisen vuoden nuorten naaraiden määrästä plus 94 % edellisen vuoden täysi-ikästen naaraiden määrästä.

Pöllön elämän vaikein vaihe on siis siirtyminen poikasiästä nuoruuteen, jolloin on löydettävä oma reviiri ja puoliso. Sopivan reviirin ja pesäpuun löytäminen on sitä vaikeampaa mitä enemmän metsiä hakataan.

Onko viirupöllö näiden tietojen perusteella uhanalainen laji eli onko se vaarassa kuolla sukupuuttoon?

Lähde: Layn kirja (ks. kirjallisuusluettelo). Lay viittaa Lambersonin, McKelveyn, Noonin ja Vossin tutkimukseen *Conservation Biology* -lehdessä.

Tuloksia ja ohjeita

Harjoitustehtävien ratkaisut

1.1 Peruskäsitteitä

1. **(a)** 3×4, **(b)** 3 ja 4, **(c)** $(5\ 7\ 9\ 0)$, $(2\ 6\ 4\ 9)$ ja $(1\ 1\ 8\ 5)$, **(d)** $\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}7\\6\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}9\\4\\8\end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix}0\\9\\5\end{pmatrix}$, **(e)** 6, **(f)** 1.

2. **(a)** $A + B = B + A = \begin{pmatrix}7 & 0\\-2 & -2\end{pmatrix}$,
(b) $A + (B + C) = (A + B) + C = \begin{pmatrix}8 & -1\\-8 & 1\end{pmatrix}$.

3. **(a)** $\begin{pmatrix}5 & -1 & 6\\2 & -2 & 8\end{pmatrix}$, **(b)** $\begin{pmatrix}3 & 1 & 4\\-4 & 8 & -4\end{pmatrix}$,
(c) $\begin{pmatrix}11 & -3 & 13\\7 & -9 & 22\end{pmatrix}$.

4. **(a)** $\begin{pmatrix}4 & -1\\0 & 3\\5 & 2\end{pmatrix}$, **(b)** $\begin{pmatrix}1 & 3\\-1 & -5\\1 & 6\end{pmatrix}$,
(c), **(d)** $\begin{pmatrix}5 & 2\\-1 & -2\\6 & 8\end{pmatrix}$.

5. Matriisi ilmoittaa, miten paljon **(a)** erikokoisista paidoista on mitäkin väriä, **(b)** erivärisistä paidoista on mitäkin kokoa paitojen määrän kolminkertaistuessa, **(c)** erivärisistä paidoista on mitäkin kokoa molemmissa liikkeissä yhteensä.

6. **(a)** $\begin{pmatrix}3 & 1\\5 & 2\\2 & -3\end{pmatrix}$, **(b)** $\begin{pmatrix}-1 & -1\\2 & 1\\8 & -4\end{pmatrix}$, **(c)** $\begin{pmatrix}8 & 9\\1 & 2\\-7 & -3\end{pmatrix}$,
(d) $\begin{pmatrix}5 & 0 & -13\\4 & 0 & 4\end{pmatrix}$.

7. **(a)** $x = -4$, **(b)** ei ratkaisua.

8. **(a)** ei ratkaisua, **(b)** $x = 1, y = -4, u = \frac{1}{2}, v = 1$,
(c) $x = \frac{5}{2}, y = \frac{5}{2}, u = -2, v = -4$.

9. **(a)** 3 ja 4, **(b)** A_1^T, A_2^T ja A_3^T.

10. **(a)** Merkitse $A = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ ja $B = \begin{pmatrix}x & y\\u & v\end{pmatrix}$.
(b) Tutki kyseisten matriisien *i*. vaakarivin ja *k*. pystyrivin alkioita.

11. Vrt. ed.

12. Väite seuraa siitä, että $a_{ik} + 0 = a_{ik}$.

13. $A + (-A) = O$, $-(A + B) = (-A) + (-B)$, $-(cA) = c(-A)$.

14. Vrt. teht. 10.

Tutkimustehtävä: *Symmetriset ja vinosymmetriset matriisit*

(a) Esim. $\begin{pmatrix}7 & 2\\2 & 5\end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix}4 & 3 & 1\\3 & 2 & 7\\1 & 7 & 5\end{pmatrix}$ ovat symmetrisiä, ja $\begin{pmatrix}0 & 3\\-3 & 0\end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix}0 & -2 & 5\\2 & 0 & 1\\-5 & -1 & 0\end{pmatrix}$ ovat vinosymmetrisiä.

(b) Jos $A^T = A$, $B^T = B$, niin (teht.10) $(A + B)^T = A^T + B^T = A + B$.

(c) $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$ ja $C = \frac{1}{2}(A - A^T)$.

1.2 Matriisien kertolasku

15. **(a)** $\begin{pmatrix}1\\18\end{pmatrix}$, **(b)** $\begin{pmatrix}-17\\-4\\6\end{pmatrix}$, **(c)** $\begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix}$.

16. **(a)** $\begin{pmatrix}2 & 5\\4 & 13\end{pmatrix}$, **(b)** $\begin{pmatrix}5 & 2\\7 & -3\end{pmatrix}$, **(c)** $\begin{pmatrix}9 & -8\\13 & -18\end{pmatrix}$
(kirjoita $M_1(M_3M_4)$ ja käytä b-kohtaa),
(d) $\begin{pmatrix}45 & -11\\111 & -31\end{pmatrix}$ (kirjoita $(M_1M_2)(M_3M_4)$ sekä käytä a- ja b-kohtia).

17. **(a)** $\begin{pmatrix}-5 & -6 & 3\\-6 & -10 & -2\\3 & -2 & -13\end{pmatrix}$, **(b)** $\begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & -2\\-2 & -1\end{pmatrix}$, **(c)** $\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\1 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

18. **(a)** $\begin{pmatrix}3 & -2\\-6 & 4\\-11 & 9\end{pmatrix}$, **(b)** $(0\ \ 1)$, **(c)** ei ole määritelty,
(d) $\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}$, **(e)** ei ole määritelty.

19. **(a)** 2, **(b)** $\begin{pmatrix}9 & -9 & 9 & -9\\8 & -8 & 8 & -8\\7 & -7 & 7 & -7\\6 & -6 & 6 & -6\end{pmatrix}$.

20. $AB = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$ ja $BA = \begin{pmatrix}10 & 20\\-5 & -10\end{pmatrix}$. Ei.

21. $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}b + d & b\\0 & d\end{pmatrix}$, missä $b, d \in \mathbf{R}$.

22. **(a)**, **(b)** Ei, **(c)** on, 3×4, **(d)** on, 4×3.

23. 5×7.

24. **(a)** A^T:n pystyrivien määrä = A:n vaakarivien määrä. **(b)** $\begin{pmatrix}50 & 37\\37 & 86\end{pmatrix}$.

27. **(a)** Jos esim. $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$ ja $B = \begin{pmatrix}3 & 4\\5 & 6\end{pmatrix}$, niin
$(AB)^T = \begin{pmatrix}13 & 29\\16 & 36\end{pmatrix}$, mutta $A^TB^T = \begin{pmatrix}16 & 23\\22 & 34\end{pmatrix}$.

28. Vektorin alkiot kerrotaan vastaavilla lävistäjäalkioilla.

29. $TK = \begin{pmatrix}1180 & 860\\1190 & 870\end{pmatrix}$ ilmoittaa eri suksilaatujen valmistuskustannukset eri tuotantolaitoksisssa.

30. 2344. Tarvikkeiden kokonaiskustannukset.

Tutkimustehtävä: *1x1-matriisit ja skalaarit*

Skalaarin a ja matriisin B tulo aB on aina määritelty, mutta 1×1-matriisin $A = (a)$ ja matriisin B tulo AB ei ole määritelty, jos B:llä on enemmän kuin yksi vaakarivi.

Tutkimustehtävä: *Matriisin jälki*

(a) $\left[A^TA\right]_{kk} = \sum_{i=1}^{m}\left[A^T\right]_{ki}\left[A\right]_{ik} = \sum_{i=1}^{m} a_{ik}\,a_{ik}$

$= \sum_{i=1}^{m} a_{ik}^{\,2}$, joten $\operatorname{tr} A^TA = \sum_{k=1}^{m}\left[A^TA\right]_{kk}$

$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ik}^{\,2} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{\,2}$.

(b) $\left[AB\right]_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$, $\left[BA\right]_{kk} = \sum_{i=1}^{m} b_{ki}a_{ik}$.

1.3 Matriisin potenssi

31. (a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

32. $\begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 \\ 3 & -4 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

33. Esim. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

34. Esim. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

35. Eivät yleisesti, mutta ovat, jos $AB = BA$.

36. Kirjoita potenssit tuloiksi ja käytä kertolaskun liitäntälakia.

37. Jos esim. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ja $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, niin

$AB = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ja $(AB)^2 = (AB)(AB) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

mutta $A^2B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

38. Korottamalla diagonaalialkiot vastaavaan potenssiin.

39. Olkoon sadepäivä tila 1 ja poutapäivä tila 2.

Tällöin $P = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

(a) 34 %. $P^5 = \begin{pmatrix} 0{,}34 & 0{,}66 \\ 0{,}33 & 0{,}67 \end{pmatrix}$.

(b) 33 %. $P^{10} = \begin{pmatrix} 0{,}33 & 0{,}67 \\ 0{,}33 & 0{,}67 \end{pmatrix}$.

(c) $\frac{1}{3}$. $P^n \to \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, kun $n \to \infty$.

40. (a) $p_t = 0{,}4p_{t-1} + 0{,}2$, $p_0 = 1$, (b) $p_t = \frac{2}{3}\cdot 0{,}4^t + \frac{1}{3}$ (ratkaisukaava, ks. MT10, s.62), (c) $p_5 = 0{,}34$, $p_{10} = 0{,}33$, (d) $p_t \to \frac{1}{3}$, kun $t \to \infty$.

41. (a) Paikan C. (b) Paikan A. Siirtymämatriisille P on

$P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}53 & 0{,}28 & 0{,}19 \\ 0{,}19 & 0{,}44 & 0{,}37 \\ 0{,}28 & 0{,}28 & 0{,}44 \end{pmatrix}$. (c) Samantekevää.

$P^t \to \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, kun $t \to \infty$.

42. Voidaan. Tasapelissä vastaavat alkiot ovat $\frac{1}{2}$.

43. (a) Matriisin T^3 *i*. vaakarivin ja *k*. pystyrivin alkio ilmoittaa, kuinka monta "2-välillistä" voittoa pelaaja *i* on saanut pelaajasta *k*. (Pelaaja *X* saa 2-välillisen voiton pelaajasta *Y*, jos on olemassa pelaajat *U* ja *V* siten, että *X* voittaa *U*:n, *U* voittaa *V*:n ja *V* voittaa *Y*:n. (b) Riippuu siitä, miten suhtautuu vaadittavaan lisätyöhön. Pisteytys sinänsä on järkevä; samoin *T*:n vielä korkeampia potensseja lisäämällä saatava pisteytys. (c) *B* 16 p., *E* 13 p., *D* 10 p., *A* 8 p., *C* 5 p.

Tutkimustehtävä: *Digraafi ja sen matriisi*

(a) $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Matriisin M^2 (M^3) *i*. vaakarivin ja *k*. pystyrivin alkio ilmoittaa, kuinka monta yhden (kahden) välilaskun sisältävää yhteyttä on kaupungista *i* kaupunkiin *k*. (c) Matriisi M^n ilmoittaa vastaavasti $n-1$ välilaskun yhteydet. Kaupungista *i* on siis yhteys kaupunkiin *k*, jos ja vain jos jollakin *n*:n arvolla matriisin M^n *i*. vaakarivin ja *k*. pystyrivin alkio $\neq 0$.

1.4 Käänteismatriisi

44. (a) Ovat. (b) Eivät.

45. (a) Ovat. (b) Eivät.

46. (a) On. $\begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$. (b) On. $\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$. (c) Ei.

(d) Ei. (e) On. $\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. (f) Ei.

47. (a) $a \neq -1$, $a \neq 6$,

(b) $A^{-1} = \dfrac{1}{a^2 - 5a - 6}\begin{pmatrix} a-5 & -3 \\ -2 & a \end{pmatrix}$.

48. (a) $X = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}$, (b) $X = \begin{pmatrix} 51 \\ -22 \end{pmatrix}$.

49. (a) $x = -19$, $y = 11$.

(b) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

50. (a) $X = \begin{pmatrix} -11 & -16 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, (b) $X = \begin{pmatrix} -3u & -3v \\ u & v \end{pmatrix}$, missä $u, v \in \mathbf{R}$.

51. (a) Kaikki diagonaalialkiot $\neq 0$. (b) Korvaamalla diagonaalialkiot käänteisluvuillaan.

52. (a) Kerro $AB = AC$ vasemmalta A^{-1}:llä. (b) Jos A ei ole kääntyvä, niin $ad = bc$ (teht. 55).

Osoita, että tällöin on $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -b & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -b & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$. Siis väite on todistettu, jos $a \neq 0$ tai $b \neq 0$. Miten hoidat tapauksen $a = b = 0$?

53. $A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I$ (teht. 27). Vastaavasti $(A^{-1})^TA^T = I$.

54. **(a)** Laske $(ABC)(C^{-1}B^{-1}A^{-1})$ ja $(C^{-1}B^{-1}A^{-1})(ABC)$ tulon liitäntälain nojalla. **(b)** Induktio.

55. **(a)** Suorita kertolasku. **(b)** Yritä ratkaista x, y, u ja v yhtälöstä $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

56. Voit olettaa, että $AB = I$. Tällöin $ad - bc \neq 0$ (miksi?). Siis A on kääntyvä (teht. 55). Osoita kertomalla yhtälö $AB = I$ vasemmalta A^{-1}:lla, että $B = A^{-1}$, joten $BA = A^{-1}A = I$.

57. Osoita, että $AA^T = A^TA = I$.

58. **(a)** 42 21 51 34 81 54 **(b)** Oikein.

59. **(a)** She, **(b)** loves, **(c)** matrices.

Tutkimustehtävä: *Ortogonaaliset matriisit*

Ei ole. Osoita, että matriisi $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on ortogonaalinen, jos ja vain jos $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$, $ac + bd = 0$. Osoita sitten, että ainoat nämä yhtälöt toteuttavat matriisit ovat tehtävässä 57 mainitut.

2.1 Perusasioita

60. **(a)** $x = 2$, $y = -2$, **(b)** ei ratkaisua, **(c)** $y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$, $x \in \mathbf{R}$.

61. **(a)** (i) $a \neq 2$, (ii) ei millään, (iii) $a = 2$, **(b)** (i) kaikilla, (ii), (iii) ei millään.

62. **(a)** (i) ei millään, (ii) $b \neq -2a$, (iii) $b = -2a$, **(b)** (i) $a \neq \pm 2$, (ii) $a = 2$, $b \neq 2$ tai $a = -2$, $b \neq -2$, (iii) $a = 2$, $b = 2$ tai $a = -2$, $b = -2$.

63. **(a)** $x = 3$, $y = -1$, $z = -4$, **(b)** $x = -5z - 19$, $y = -3z - 13$, $z \in \mathbf{R}$, **(c)** ei ratkaisua.

64. **(a)** $x + y + z = 0$, $x + y + z = 1$, **(b)** $x + y = 0$, $2x + 2y = 0$, $3x + 3y = 0$.

65. **(a)** (i) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, (ii) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & -1 & 7 \end{pmatrix}$,

(b) (i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, (ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 7 \end{pmatrix}$.

66. **(a)** $\begin{cases} x - 3y = 6 \\ -2x + y = 4, \end{cases}$ **(b)** $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2y - 3z = 1 \\ -3x + y = 2, \end{cases}$

(c) $\begin{cases} -2x - y + 4u = 5 \\ -3x + 2y + 7z + 8u = 3 \\ x + 2u = 4 \\ 3x + z + 3u = 6. \end{cases}$

67. **(a)** On, **(b)** ei.

68. **(a)** $\begin{cases} x + 5y = 1 \\ 3x + 2y + z = 23 \\ -x + 4z = -35, \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x + 2y - 3z = 0 \\ -4x + 2y - 8z = 0. \end{cases}$

69. **(a)** $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 13 \\ 8 \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

70. **(a)** $x = -1$, $y = 3$, $z = 1$, **(b)** $x = 6z + 13$, $y = 5z + 2$, $z \in \mathbf{R}$.

71. **(a)** $x = 4u + 13$, $y = u + 6$, $z = 3u + 5$, $u \in \mathbf{R}$, **(b)** $x = z + 13$, $y = 3z + 11$, $z \in \mathbf{R}$, $u = -4$.

72. **(a)** $x = \frac{5}{6}$, $y = \frac{7}{3}$, $z = -1$, $u = 3$, **(b)** $x = 10y - 4u - 19$, $y \in \mathbf{R}$, $z = 8 - 3u$, $u \in \mathbf{R}$.

73. $x_1 = 2n - 1$, $x_2 = 2n - 3$, ..., $x_{n-1} = 3$, $x_n = 1$.

74. Sivuamispisteiden etäisyydet kärjistä ovat $x = \frac{1}{2}(a - b + c)$, $y = \frac{1}{2}(a + b - c)$ ja $z = \frac{1}{2}(-a + b + c)$.

75. A:ta $a = 10 - \frac{1}{2}c$ yks., B:tä $b = 20 - c$ yks., C:tä c yks., $0 \leq c \leq 20$. Jos A:ta valmistetaan a yks., B:tä b yks. ja C:tä c yks., niin saat yhtälöparin $2a + 3b + 4c = 80$, $2a + 2b + 3c = 60$. Määrät eivät saa olla negatiivisia.

Tutkimustehtävä: *Yhtälöparin ratkaisujen lukumäärä*

(a) $ad - bc \neq 0$.
(b) $ad - bc = 0$ ja $(af - ce)(bf - de) \neq 0$.
(c) $ad - bc = af - ce = bf - de = 0$.

2.2 Gaussin eliminointimenetelmä

76. Lisäämällä **(a)** (i) 2. yhtälöön 1. yhtälö, (ii) 3. yhtälöön 1. yhtälö kerrottuna 2:lla, **(b)** (i) 2. yhtälöön 1. yhtälö kerrottuna (–3):lla, (ii) 3. yhtälöön 1. yhtälö kerrottuna (–5):llä.

77. **(a)** $\begin{cases} x + 2y = -5 \\ -y = -1, \end{cases}$ **(b)** $\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ 6y - 3z = -9 \\ 3z = 3. \end{cases}$

78. **(a)** 3, **(b)** 2, **(c)** 2.

79. **(a)** 2, **(b)** 3, **(c)** 3.

80. Aluksi osoita, että jos B saadaan A:sta yhdellä alkeismuunnoksella, niin A saadaan B:stä yhdellä (samaa tyyppiä olevalla) alkeismuunnoksella. Käytä sen jälkeen induktiota.

81. **(a)** Yksi, **(b)** äärettömän monta, **(c)** ei yhtään.

82. **(a)** $x = 3$, $y = 2$, $z = 4$, **(b)** $x = -5\frac{2}{3}$, $y = 3\frac{1}{3}$, $z = 4$.

83. **(a)** $x = 1$, $y = 0$, $z = 3$, **(b)** $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

84. **(a)** $x = z$, $y = 2z - 3$, $z \in \mathbf{R}$, **(b)** $x = 3z + 2$, $y = 3z - 2$, $z \in \mathbf{R}$.

85. **(a)** $x = 5$, $y = -3$, $z = 2$, **(b)** $x = 2y + 13$, $y \in \mathbf{R}$.

86. **(a)** $x = -3u - 6v$, $y = 3u + 7v + 1$, $z = -2u - 5v$, $u, v \in \mathbf{R}$, **(b)** $x = 3$, $y = -2$, $z = 4$, $u = -1$.

87. **(a)** $a \in \mathbf{R}$, **(b)** $a = \frac{5}{2}$, **(c)** $a = 11$.

88. **(a)** (i) Ei millään, (ii) $b = 11$, (iii) $b \neq 11$, **(b)** (i) $a \neq 1$, (ii) $a = 1$, $b = 41$, (iii) $a = 1, b \neq 41$.

89. **(a)** 4, **(b)** äärettömän monta.

Tutkimustehtävä: *Alkeismuunnosmatriisit*

Matriisi E saadaan identtisestä $m{\times}m$-matriisista **(a)** vaihtamalla *i*. ja *k*. vaakarivit, **(b)** korvaamalla *k*. vaakarivi diagonaalialkio 1 *c*:llä, **(c)** korvaamalla *k*. vaakarivin *i*:s alkio 0 *c*:llä.

2.3 Gauss-Jordanin eliminointimenetelmä

90. **(a)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, **(b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

91. **(a)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, **(b)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\frac{1}{5} & 0 \\ 1 & 0 & -1\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

92. **(a)** $x = -1, y = 3, z = 1$, **(b)** $x = y = z = 0$.

93. **(a)** $x = 1 - u$, $y = 3 + u$, $z = 2 - u, u \in \mathbf{R}$, **(b)** $x = \frac{2}{3}z + \frac{7}{3}$, $y = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}, z \in \mathbf{R}$.

94. **(a)** $a \neq \pm 2$, **(b)** $a = -2$, **(c)** $a = 2$.

95. Viimeisen vaakarivin alkiot = 0.

97. **(a)** $\begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, **(b)** ei ole olemassa,

(c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{11}{24} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} & -\frac{5}{12} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{8} & \frac{13}{24} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$, **(d)** ei ole olemassa.

98. **(a)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, **(b)** ei ole olemassa,

(c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{2} & -1 & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{17}{8} & \frac{7}{8} & -\frac{13}{8} & -\frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{3}{8} \end{pmatrix}$.

99. $a \neq 0$.

100. **(a)** $X = \begin{pmatrix} 7 & -14 & 15 \\ -1 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$,

(b) $X = \begin{pmatrix} -4 & -13 & 14 & 1 \\ -1 & -5 & 8 & -2 \\ 11 & 33 & -39 & 4 \end{pmatrix}$.

101. **(a)** $x = y = 0$, **(b)** $x = 2y$, $y \in \mathbf{R}$, **(c)** $x = y = 0$.

102. **(a)** $x = z$, $y = 2z$, $z \in \mathbf{R}$, **(b)** $x = y = z = 0$, **(c)** $x = -2z$, $y = -\frac{1}{2}z, z \in \mathbf{R}$.

103. **(a)** $x = y = z = 0$, **(b)** $x = 0$, $y = z, z \in \mathbf{R}$, **(c)** $x = y = -u$, $z = u$, $u \in \mathbf{R}$.

Tutkimustehtävä: *Käyrän sovittaminen*

(a) $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2$. **(b)** Tehtävällä on ratkaisu, jos ja vain jos kyseisten pisteiden x-koordinaatit ovat kaikki erisuuria. Ratkaisupolynomi on tällöin yksikäsitteinen ja sen aste ≤ 2. Olkoot (x_1, y_1), (x_2, y_2) ja (x_3, y_3) nämä pisteet. Tutki polynomia $f(x) = a + bx + cx^2$ kuten a-kohdassa. Saat yhtälöryhmän $a + bx_1 + cx_1^2 = y_1$, $a + bx_2 + cx_2^2 = y_2$, $a + bx_3 + cx_3^2 = y_3$. Osoita, että tällä yhtälöryhmällä on ratkaisu a, b, c, jos ja vain jos x_1, x_2 ja x_3 ovat erisuuria, ja että ratkaisu on tällöin yksikäsitteinen. Jos luvuista x_1, x_2 ja x_3 ainakin kaksi on yhtäsuuria, niin on selvää (miksi?), että minkään asteinen polynomi ei toteuta vaadittua ehtoa.
(c) Keskipiste on (2, 1) ja säde on 5.
(d) Tehtävällä on ratkaisu, jos ja vain jos kyseiset pisteet eivät ole samalla suoralla. Ratkaisu on tällöin yksikäsitteinen. Voit käsitellä tehtävän algebrallisesti, vrt. b-kohta, tai geometrisesti.

Tutkimustehtävä: Sähköiset virtapiirit

(a) $I = 2{,}3$ A, **(b)** $I_1 = 0{,}4$ A, $I_2 = -0{,}3$ A, $I_3 = 0{,}7$ A.

2.4 Leontiefin panos-tuotos-malli

104. $m = \frac{31}{36}p$, $t = \frac{8}{9}p$, $p \geq 0$.

105. 2 : 3. Olkoon A:n tuotanto a yks. ja B:n b yks. **(a)** Jotta tasapaino saavutettaisiin, on A:n tuotettava B:lle sama määrä kuin mitä B tuottaa A:lle. Saat siis yhtälön $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}$.
(b) $a = \frac{a}{2} + \frac{b}{3}$, $b = \frac{a}{2} + 2\frac{b}{3}$.

106. Kaivos 33,7 milj., sähkö 30,4 milj., teräs 35,9 milj. Olkoot k, s ja t kysytyt määrät. Silloin $k = 0{,}4s + 0{,}6t$, $s = 0{,}6k + 0{,}1s + 0{,}2t$, $t = 0{,}4k + 0{,}5s + 0{,}2t$.

107. Matriisin kaikki pystyrivisummat = 1, joten tuotantoa ei riitä avoimelle sektorille.

108. Tavaroita 80,6 yks., ja palveluja 88,9 yks. Olkoot t ja p kysytyt määrät. Silloin $t = 0{,}2t + 0{,}5p + 20$, $p = 0{,}4t + 0{,}3p + 30$.

109. Teollisuus 50 yks., maatalous 30 yks., palvelut 20 yks. Kysytyt määrät ovat 226 – 0,5 · 226 – 0,4 · 119 – 0,2 · 78, 119 – 0,2 · 226 – 0,3 · 119 – 0,1 · 78 ja 78 – 0,1 · 226 – 0,1 · 119 – 0,3 · 78.

110. Ei ole järkevä. Tuotanto ei tällöin riitä avoimelle sektorille, vaan sieltä päinvastoin tarvitaan resursseja. Tämä näkyisi mallin ratkaisussa negatiivisina tuotantolukuina.

Tutkimustehtävä: *Matriisin* $(1 - C)^{-1}$ *alkioiden merkitys*

(a) Tarkastele sellaista kysyntävektoria, jonka k. alkio = 1 ja muut alkiot = 0. **(b)** Minkä tahansa alan kysynnän lisääntyessä on lisättävä kaikkien alojen tuotantoa.

3.1 Vektoriavaruus ja aliavaruus

112. **(a)** Ei. Taso. **(b)** On. Origon kautta kulkeva taso. **(c)** Ei. Taso. **(d)** On. Origon kautta kulkeva suora.

113. **(a)** On. Origon kautta kulkeva suora. **(b)** Ei. Taso. **(c)** Ei. Taso. **(d)** Ei. Suora.

114. **(a)** Ei, **(b)** on.

115. **(a)** $\frac{5}{7}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \frac{8}{7}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$, **(b)** $\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

116. **(a)** $-\frac{3}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix}$,

(b) $-\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} - \frac{3}{4}\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}$.

117. **(a)** Voidaan, **(b)** ei voida.

118. $a = 3$.

119. **(a)** Suoran $y = -x$, **(b)** suoran $y = -\frac{3}{2}x$, **(c)** koko $\mathbf{R}^2$:n.

120. **(a)** Suoran $\left\{t\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}\right\}$, **(b)** suoran $\bar{r} = \left\{t\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}\right\}$,

(c) koko $\mathbf{R}^3$:n, **(d)** tason, jonka vektoriyhtälö on $\left\{t\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

121. **(a)** $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}\right\}$, **(b)** $x - z = 0$.

122. On. Osoita, että lineaarisella yhtälöryhmällä $rE + sF + tG = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ on aina ratkaisu r, s, t.

123. Osoita, että lineaarisella yhtälöryhmällä $rA_1 + sA_2 + tA_3 + uA_4 = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ on aina ratkaisu r, s, t, u.
Tehtävät 123 ja 124 voidaan ratkaista hieman mukavammin käyttämällä luvussa 3.2 esitettäviä käsitteitä.

124. $15x + 6y - z = 0$. Ei ole.

125. **(a)**, **(b)** Nolla-avaruuden. Virittäjävektori = O.

126. **(a)** Vektorin $\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$ virittämän origon kautta kulkevan suoran. **(b)** Nolla-avaruuden.

127. **(b)** Yhtälöryhmä on ratkeava, ks. kohta 6.

Tutkimustehtävä: *Polynomiavaruus*

(b) On, **(c)** ei, **(c)** on.

Tutkimustehtävä: *Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisut*

(a) Eivät. **(b)** Tarkoittakoon (TY) "täydellistä" yhtälöä $AX = B$ ja (HY) homogeeniyhtälöä $AX = O$. (i) Olkoon Y (HY):n ratkaisu. Osoita, että $X_0 + Y$ toteuttaa (TY):n. Siis jokainen muotoa $X = X_0 + Y$ oleva vektori on (TY):n ratkaisu. (ii) Olkoon X (TY):n ratkaisu. Merkitse $Y = X - X_0$. Osoita, että Y toteuttaa (HY):n. Siis jokainen (TY):n ratkaisu on vaadittua muotoa.

3.2 Kanta ja dimensio

129. **(a)** Ovat, **(b)** eivät.

130. **(a)** Eivät, **(b)** ovat.

131. **(a)** Eivät, **(b)** ovat.

132. **(a)**, **(b)** Eivät, **(c)** ovat.

133. **(a)** Ovat, **(b)** eivät, **(c)**, **(d)** ovat.

134. **(a)** On, **(b)** ei.

135. **(a)** Muodostavat, **(b)** eivät, **(c)** muodostavat, **(d)** eivät.

136. $a \neq -3$.

137. **(a)** Esim. $\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$, **(b)** esim. $\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$,

(c) esim. $\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$.

138. **(a)** (i) Esim. $\left\{\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}\right\}$, (ii) 2,

(b) (i) esim. $\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}\right\}$, (ii) 2,

(c) (i) esim. $\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\right\}$, (ii) 1,

(d) (i) esim. $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$, (ii) 3.

139. **(a)** (i) Esim. annetut vektorit, (ii) 3, **(b)** (ii) esim. neljä ensimmäistä vektoria, (ii) 4.

140. **(a)** Ei ole, **(b)** on.

Tutkimustehtävä: *Koordinaattivektori*

(a) $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Tutkimustehtävä: *Polynomiavaruuden aliavaruus*

(a) $\{1, x, x^2\}$, 3,

(b) $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$, $n + 1$.

3.3 Normi ja sisätulo

141. (a) $2\sqrt{2}$, (b) $5\sqrt{2}$ (c) 2, (d) 6.

142. (a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ 0 \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix}$.

143. $t = \pm 9$.

144. (a) 3, (b) 20, (c) 120°.

145. Ei välttämättä. Jos esim. $X = 0$, niin Y voi olla mielivaltainen.

146. (a) 6, (b) –10, (c) 6.

147. (a) 45°, (b) 48,2°, (c) 110,5°.

148. 3.

149. $t = -1$ tai $t = 2$.

151. (a) $t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbf{R}$ (b) $s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s, t \in \mathbf{R}$.

153. Nollavektori.

154. $2\sqrt{2}$.

155. $\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Tutkimustehtävä: *Pisteen etäisyys tasosta*

(a) Ohje: Olkoot $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ja $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ tason kaksi eri pistettä. Osoita, että näiden pisteiden välinen vektori on kohtisuorassa vektoria N vastaan.

Tutkimustehtävä: *Cauchy-Schwarzin epäyhtälö ja kolmioepäyhtälö*

(a) (i) Käytä sisätulon geometrista ominaisuutta. (ii) *Tapa 1*. On siis osoitettava, että

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\,\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

kaikilla $x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbf{R}$. Näytä aluksi, että

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(x_i y_k - x_k y_i)^2$$

Tapa 2. Merkitse $f(t) = \|X - tY\|^2$ missä $t \in \mathbf{R}$. Palauta normi sisätuloon ja käytä sisätulon laskulakeja, jolloin saat $f(t)$:n esitetyksi t:n toisen asteen polynomina. Koska $f(t) \ge 0$ kaikilla $t \in \mathbf{R}$ (miksi ?), saat diskriminanttiehdon, josta väitös seuraa. (b) Korota neliöön ja käytä Cauchy-Schwarzin epäyhtälöä.

3.4 Tason lineaarikuvaukset

156. (a) On, (b) ei, (c) on, (d) ei.

157. Kirjoita $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Käytä F:n lineaarisuutta sekä matriisin ja vektorin tulon esitystä pystyvektorien lineaarikombinaationa (s. 96).

158. (a) $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$.

159. Kolmioksi, jonka kärjet ovat (a) (2,4), (–4,–2) ja (4,–4). (b) $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$, $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ ja $(-1, 1)$.

160. (a) $\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{pmatrix}$, $\left(\frac{18}{25}, -\frac{24}{25}\right)$, suora on $4x + 3y = 0$. (b) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $(1, -1)$, $x + y = 0$, (c) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $x\sqrt{3} + y = 0$.

161. (a) Yleisesti $(AB)^T = B^T A^T$ (teht. 27), joten $P^T = (UU^T)^T = (U^T)^T U^T = UU^T = P$. (b) Koska $U^T U = 1$, niin $P^2 = PP = (UU^T)(UU^T) = U(U^T U)U^T = UU^T = P$.

162. (a) $\left(-\frac{11}{5}, -\frac{2}{5}\right)$, (b) (y, x).

163. (a) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ja $(1, \sqrt{3})$,

(b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, (0, 1) ja (–4, 3),

(c) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ ja $\left(-\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$,

(d) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, (–1, –2) ja (2, 0).

164. (a) Peilaus suoran $y = (\sqrt{2} - 1)x$ suhteen, (b) 45° kierto, (c) peilaus suoran $y = 2x$ suhteen, (d) kierto kulman $\arctan\frac{4}{5} \approx 53{,}1°$ verran.

165. (a) Yleisesti $(A - B)^T = A^T - B^T$ ja $(AB)^T = B^T A^T$, joten $R^T = (2UU^T - I)^T = 2(U^T)^T U^T - I^T = 2UU^T - I = R$. (b) $RR^T = RR = (2UU^T - 1)(2UU^T - I)$. Poista sulut. Huomaa, että $U^T U = 1$.

166. (a) $\left(\frac{9}{13}, \frac{20}{13}\right)$, (b) $\left(\frac{5}{13}, \frac{14}{13}\right)$.

167. (a) Osoita, että $KK^T = I$.

(b) $K^{-1} = K^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$ vastaa kiertoa kulman $-\theta$ verran.

168. $\begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$.

Tutkimustehtävä: *Vektorin projektio origon kautta kulkevalle tasolle*

(**a**) Määritä c ja d esityksessä $X = cU + dV$. Vrt. s. 119–120. (**b**) Projektio = $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, normaalikomponentti = $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. (**c**) $UU^T + VV^T$.

Tutkimustehtävä: *Tason kierto*

Huomaa, että kierto kulman $\alpha + \beta$ verran on yhdistetty kuvaus kierroista α:n ja β:n verran. Miten saadaan yhdistetyn kuvauksen matriisi, kun yhdistettävien kuvausten matriisit tunnetaan.

4.1 Ominaisarvoprobleema

169. (**a**) Ei, (**b**) on.

170. (**a**) $a = -\frac{1}{2}$, (**b**) $a = \frac{1}{3}$.

171. (**a**) Ei, (**b**) on.

172. (**a**) Ei, (**b**) on.

173. (**a**) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$, $X_1 = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \neq 0$, (**b**) $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$, $X = t\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $t \neq 0$.

174. (**a**) (i) Voidaan, esim. $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$.
(ii) Ei voida. (**b**) (i), (ii) Voidaan, esim. $\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$.
(**c**) (i) Ei voida. (reaalialueella).

175. (i) (**a**) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, (**b**) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Kaikki vektorit ovat ominaisvektoreita. (ii) Voidaan.

176. (**a**) Esim. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
(**b**) Esim. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (**c**) Ei voida.
Millään tällaisella matriisilla ei ole kahta lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria.

177. (**a**) Korottamalla ominaisarvot neliöön. Ominaisvektorit pysyvät samoina. Jos $AX = \lambda X$, niin $A^2X = A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda\lambda X = \lambda^2 X$. (**b**) Korottamalla ominaisarvot p. potenssiin. Ominaisvektorit pysyvät samoina. Todistus induktiolla.

178. Ottamalla ominaisarvoista käänteisluvut. Ominaisvektorit pysyvät samoina. Ominaisarvo ei voi olla 0, sillä tällöin yhtälöllä $AX=O$ olisi ei-triviaali ratkaisu X, joten A ei olisi kääntyvä. Jos $AX = \lambda X$, niin $X = A^{-1}AX = A^{-1}(\lambda X) = \lambda A^{-1}X$, joten $A^{-1}X = \frac{1}{\lambda}X$.

179. Lisäämällä ominaisarvoihin 1. Ominaisvektorit pysyvät samoina. Jos $AX = \lambda X$, niin $(A + I)X = AX + X = \lambda X + X = (\lambda + 1)X$.

180. (**a**) Tutki karakteristisen yhtälön diskriminanttia. (**b**) *Tapa 1*. Olkoon $AX_1 = \lambda_1 X_1$ ja $AX_2 = \lambda_2 X_2$, $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ Voimme olettaa, että $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = 1$ (miksi?). Silloin $ax_1 + by_1 = \lambda_1 x_1$ ja $bx_1 + cy_1 = \lambda_1 y_1$. Kertomalla edellisen yhtälön y_1:llä ja x_1:llä ja laskemalla yhteen saat $(a + c)x_1y_1 + b(x_1^2 + y_1^2) = 2\lambda_1 x_1y_1$. Koska $\lambda_1 + \lambda_2 = a + c$ (miksi?), saat yhtälön (i) $(\lambda_1 - \lambda_2)x_1y_1 = b(x_1^2 + y_1^2)$. Lähtemällä vastaavasti yhtälöistä $ax_2 + by_2 = \lambda_2 x_2$ sekä $bx_2 + cy_2 = \lambda_2 y_2$ päädyt yhtälöön (ii) $(\lambda_2 - \lambda_1)x_2y_2 = b(x_2^2 + y_2^2)$. Vähentämällä yhtälöt (i) ja (ii) saat (miksi?) $(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1y_1 + x_2y_2) = 0$, josta väite seuraa (miten?).
Tapa 2. Kertomalla yhtälön $AX_1 = \lambda_1 X_1$ vasemmalta X_2^T:lla ja yhtälön $AX_2 = \lambda_2 X_2$ vasemmalta X_1^T:lla saat $X_2^T AX_1 = \lambda_1 X_2^T X_1$, $X_1^T AX_2 = \lambda_2 X_1^T X_2$. Koska 1×1-matriisi on oma transpoosinsa, niin $X_1^T AX_2 = (X_1^T AX_2)^T = X_2^T A^T X_1 = X_2^T AX_1$. Miten jatketaan?

181. Ks. teht. 180 a.

182. (**a**) Osoita, että karakteristiset yhtälöt ovat samat. (**b**) Eivät.

183. (**a**) Olkoon $ABX = \lambda X$. Kertomalla vasemmalta B:llä saat $BABX = \lambda BX$, joten λ on myös BA:n ominaisarvo ja BX on vastaava ominaisvektori. (**b**) Eivät.

184. Olkoon λ kyseinen ominaisarvo. (**a**) $\lambda = 0$ tai $\lambda = 1$. Jos $AX = \lambda X$, niin $\lambda^2 X = A^2X = AX = \lambda X$, joten $\lambda^2 = \lambda$. (**b**) $\lambda^p = 1$ (λ ei välttämättä ole reaalinen) (**c**) $\lambda = 0$.

4.2 Dynaamisia systeemejä

185. $\begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} \end{pmatrix}$. Alkutilavektorilla ei ole merkitystä.

186. (**a**) Muodosta karakteristinen yhtälö ja ratkaise se. (**b**) Koska $0 < p+q < 2$, niin $-1 < p+q-1 < 1$, joten $-1 < \lambda_2 < 1$. Tällöin $\lambda_2^t \to 0$, kun $t \to \infty$.

187. (**a**) $U_1 = \begin{pmatrix} q-1 \\ p-1 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. (**b**) Jos $c_1 = 0$, niin $Y_0 = c_2U_2 = \begin{pmatrix} c_2 \\ -c_2 \end{pmatrix}$ $c_2 \neq 0$, mikä on mahdotonta, koska Y_0:n alkiot eivät voi olla negatiivisia.

188. Ks. kohta 3.

189. (**a**) $X_{t+1} = LX_t$, missä $L = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} p & a \\ b & q \end{pmatrix}$ ja X_t on ikäjakauma t vuoden kuluttua.

191. 92 pöllöä ja 120 000 myyrää.

Suomalais-englantilainen sanasto

aliavaruus, *subspace*
alkeismuunnos, *elementary row operation*
alkeismuunnosmatriisi, *elementary matrix*
aste, *rank*
determinantti, *determinant*
diagonaalimatriisi, *diagonal matrix*
dimensio, *dimension*
dynaaminen systeemi, *dynamic system*
Gaussin eliminointimenetelmä, *Gaussian elimination method*
Hamming-koodi, *Hamming code*
homogeeninen, *homogeneous*
homotetia, *homothety*
identtinen matriisi, *identity matrix*, *unit matrix*
jälki, *trace*
kanta, *basis*
karakteristinen yhtälö, *characteristic equation*
kerroinmatriisi, *coefficient matrix*
kertaluku, *order*
kierto, *rotation*
kohtisuora, *perpendicular*, *orthogonal*
kolmioepäyhtälö, *triangle inequality*
kulma, *angle*
kulutusmatriisi, *consumption matrix*
kysyntävektori, *demand vector*
käyrän sovittaminen, *curve fitting*
käänteismatriisi, *inverse (matrix)*
kääntyvä, *invertible*
lineaarikombinaatio, *linear combination*
lineaarikuvaus, *linear mapping*, *linear transformation*
lineaarinen yhtälöryhmä, *system of linear equations*
lineaarisesti riippumaton, *linearly independent*
lineaarisesti riippuva, *linearly dependent*
Markovin ketju, *Markov chain*
matriisi, *matrix*
neliömatriisi, *square matrix*
nollamatriisi, *null matrix*
normi, *norm*
ominaisarvo, *eigenvalue*, *characteristic value*, *characteristic root*
ominaisvektori, *eigenvector*, *characteristic vector*
ortogonaalinen, *orthogonal*
ortonormaali, *orthonormal*
osittaminen, *partition*
panos-tuotos-malli, *input-output-model*
peilaus, *reflection*
pelkistetty porrasmuoto, *reduced (row) echelon form*
porrasalkio, *pivot (element)*
porrasmuoto, *(row) echelon form*
porraspystyrivi, *pivot column*
projektio, *projection*
pystyrivi, *column*
pääakseli, *principal axis*
salakirjoitus, *cryptography*
siirtymämatriisi, *transition matrix*
sisätulo, *inner product*
skalaari, *scalar*
suora, *line*
symmetrinen, vinosymmetrinen, *symmetric*, *skew-symmetric*
tasapainovektori, *steady-state vector*
taso, *plane*
transpoosi, *transpose*
triviaali ratkaisu, *trivial solution*
tuotantovektori, *production vector*
turnausmatriisi, *tournament matrix*
täydennetty kerroinmatriisi, *augmented matrix*
vaakarivi, *row*
vaihtomatriisi, *exchange matrix*
vektoriavaruus, *vector space*
virittää, *span*
virtapiiri, *circuit*

Asia- ja nimihakemisto

aliavaruus 90
– vektorien virittämä 93
alkeismuunnosmatriisi 68
Cauchy– Schwarzin epäyhtälö 123
Cayley, Arthur 15
digraafi 35
dimensio
– matriisin 7
– vektoriavaruuden 107
dynaaminen systeemi 151
Gauss, Carl Friedrich 68
Gaussin eliminointimenetelmä 57
Gaussin– Jordanin eliminointimenetelmä 70
Hamming– koodi 111
homotetia 126
kanta 105
– ortonormaali kanta 118
– ominaisvektorikanta 142
karakteristinen yhtälö 140
kierto 130
kolmioepäyhtälö 123
koordinaatit 118
kulutusmatriisi 83
kysyntävektori 83
Leontief, Wassily 80
Leslien matriisi 149
lineaarikombinaatio 92
lineaarikuvaus 124
lineaarinen riippumattomuus 104
lineaarinen riippuvuus 101
Markovin ketju 29
– stabiilius 30
– tasapainovektori 30
matriisi 7
– alkeismuunnokset 59
– aste 62
– diagonaalimatriisi 18
– diagonalisointi 146
– idempotentti 145
– jälki 25
– kertaluku 7
– kertolasku 17
– käänteismatriisi 38
– kääntyvä 40
– neliömatriisi 8
– nilpotentti 145
– nollamatriisi 14
– ortogonaalinen 45
– osittaminen 8
– porrasmuoto 52
– pelkistetty porrasmuoto 69
– symmetrinen, vinosymmetrinen 15
– transponointi, transpoosi 9
– unipotentti 133
– vastamatriisi 14
normi 113
ominaisarvo 139
ominaisarvoprobleema 140
ominaisvektori 137
ortonormaali vektorijoukko 118
panos– tuotos– malli 80
peilaus 125, 129
projektio 119, 128, 134
Pythagoraan lause 117
siirtymämatriisi 29
sisätulo 114
suunnattu graafi 35
Sylvester, James Joseph 15
tuotantovektori 81
vaihtomatriisi 81
vektoriavaruus 89
yhtälöryhmä (lineaarinen) 50
– alkeismuunnokset 57
– homogeeninen 51, 95
– kerroinmatriisi 50
– porrasmuoto 52
– triviaaliratkaisu (homogeenisen) 74
– täydennetty kerroinmatriisi 51

Kirjallisuusluettelo

Advanced Algebra. The University of Chicago School Mathematics Project. Teacher's Edition. Scott, Foresman and Co., 1990.

H.Anton, C.Rorres, *Elementary Linear Algebra. Applications Version*. 6th Ed. John Wiley, 1991.

C.H.Edwards, D.E.Penney, *Elementary Linear Algebra*. Acad. Pr., 1988.

J.B.Fraleigh, R.A.Beauregad, *Linear Algebra*. 3rd Ed. Addison-Wesley, 1995.

S.K.Kivelä, *Matriisilasku ja lineaarialgebra*. 10. p. Otatieto, 1994.

E.Korhonen, M.Siltanen, *Matriisilaskenta ja lineaarialgebra*. Pitkän matematiikan soveltava kurssi. Nurmon lukio, 1997.

D.C.Lay, *Linear Algebra and Its Applications*. 2nd Ed. Addison-Wesley Longman, 1997.

S.Mustonen, *Survo ja minä*. SurvoSystems, 1996.

D.Norman, *Introduction to Linear Algebra for Science and Engineering*. Addison-Wesley, 1995.

G.Williams, *Computational Linear Algebra with Models*. 2nd Ed. Allyn and Bacon, 1978.

Graafisen laskimen käyttö

Useimmilla graafisilla laskimilla voidaan suorittaa vektorien ja matriisien laskutoimituksia. Matriiseissa voi olla jopa 255 vaaka- ja pystyriviä. Käsiteltävät matriisit kannattaa tallentaa laskimen muistiin sopivilla muuttujanimillä (esimerkiksi A, B, ...), jonka jälkeen laskut voidaan suorittaa näiden muuttujien avulla. Tämän liitteen esimerkeissä on käytetty erästä yleistä laskintyyppiä.

Esimerkki 1. Tutki laskimesi käyttöoppaasta, kuinka matriisi syötetään laskimeen. Tallenna muistipaikkoihin A ja B matriisit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Esimerkkilaskimessamme matriisi A syötetään muodossa [[2 , –3][4 , –1]] ja tallennetaan näppäimellä STO, jonka jälkeen annetaan muuttujanimi A. Vastaavasti matriisi B syötetään muodossa [[1 , 2 , 3][4 , 5 , 6]]. Kutsuttaessa sitten muuttujanimiä tulevat matriisit A ja B näytölle seuraavasti:

```
A
                    [[2  -3]
                     [4  -1]]
B
                    [[1 2 3]
                     [4 5 6]]
```

Esimerkki 2. Laske $A+A$, $-3A$, A^{-1}, AB , BA ja A^5.

Asettamalla tulostustarkkuudeksi Float saamme:

Summa ja luvulla kertominen

```
A+A
                [[4   -6]
                 [8   -2]]
-3A
                [[-6   9]
                 [-12  3]]
█
```

Käänteismatriisi ja kertolasku A*B

```
A^-1
                [[-.1 .3]
                 [-.4 .2]]
A*B
                [[-10 -11 -12]
                 [0    3   6 ]]
█
```

Kertolasku B*A

```
ERROR 12 DIM MISMATCH
```

Potenssi

```
A^5
                [[332 -213]
                 [284 119 ]]
█
```

Esimerkki 3. Ratkaise yhtälöryhmä $2x - 3y - z = 2$, $4x - y + 6z = 11$, $x + y + 7z = 1$.

Olkoon yhtälöryhmän kerroinmatriisi A ja oikealla puolella olevien vakioiden muodostama pystyvektori B. Yhtälöryhmä voidaan siis kirjoittaa matriisimuotoon $AX = B$, josta $X = A^{-1}B$. Ratkaisu saadaan laskimella seuraavasti:

Tallenna matriisi *A*

```
[[2, -3, -1][4,-1,6][1,
1,7]]→A
                [[2 -3 -1]
                 [4 -1 6 ]
                 [1 1  7 ]]
■
```

Tallenna vektori *B*

```
[[2] [11] [1]]→B
                     [[2 ]
                      [11]
                      [1 ]]
■
```

Laske vektori *X*

```
A⁻¹*B
                 [[5 ]
                  [3 ]
                  [-1]]
```

Ratkaisu on siten $x = 5$, $y = 3$, $z = -1$.

Laskimien valikoista löytyy yleensä paljon muitakin matriiseihin liittyviä toimintoja kuten transponointi, vaakarivimuunnokset, porrasmuotomuunnokset sekä ominaisarvojen ja -vektorien määrittäminen.

Esimerkki 4. Olkoon A edellisen tehtävän kerroinmatriisi. Muunna A porrasmuotoon sekä pelkistettyyn porrasmuotoon. Mikä on A:n aste?

Asettamalla tulostustarkkuudeksi 2 desimaalia saamme:

Porrasmuoto (ref)

```
ref A
        [[1.00 -.25 1.50]
         [0.00 1.00 1.60]
         [0.00 0.00 1.00]]
```

Pelkistetty (rref)

```
rref A
        [[1.00 0.00 0.00]
         [0.00 1.00 0.00]
         [0.00 0.00 1.00]]
■
```

Porrasmuodoista näemme, että matriisin aste = 3.

Esimerkki 5. Laske edellä mainitun matriisin A ominaisarvot ja ominaisvektorit.

Ominaisarvot (eigVl), *oikealle vieritetty näyttö*

```
eigVl A
...,-2.18) (7.00,0.00)}
```

Ominaisarvot (eigVl)

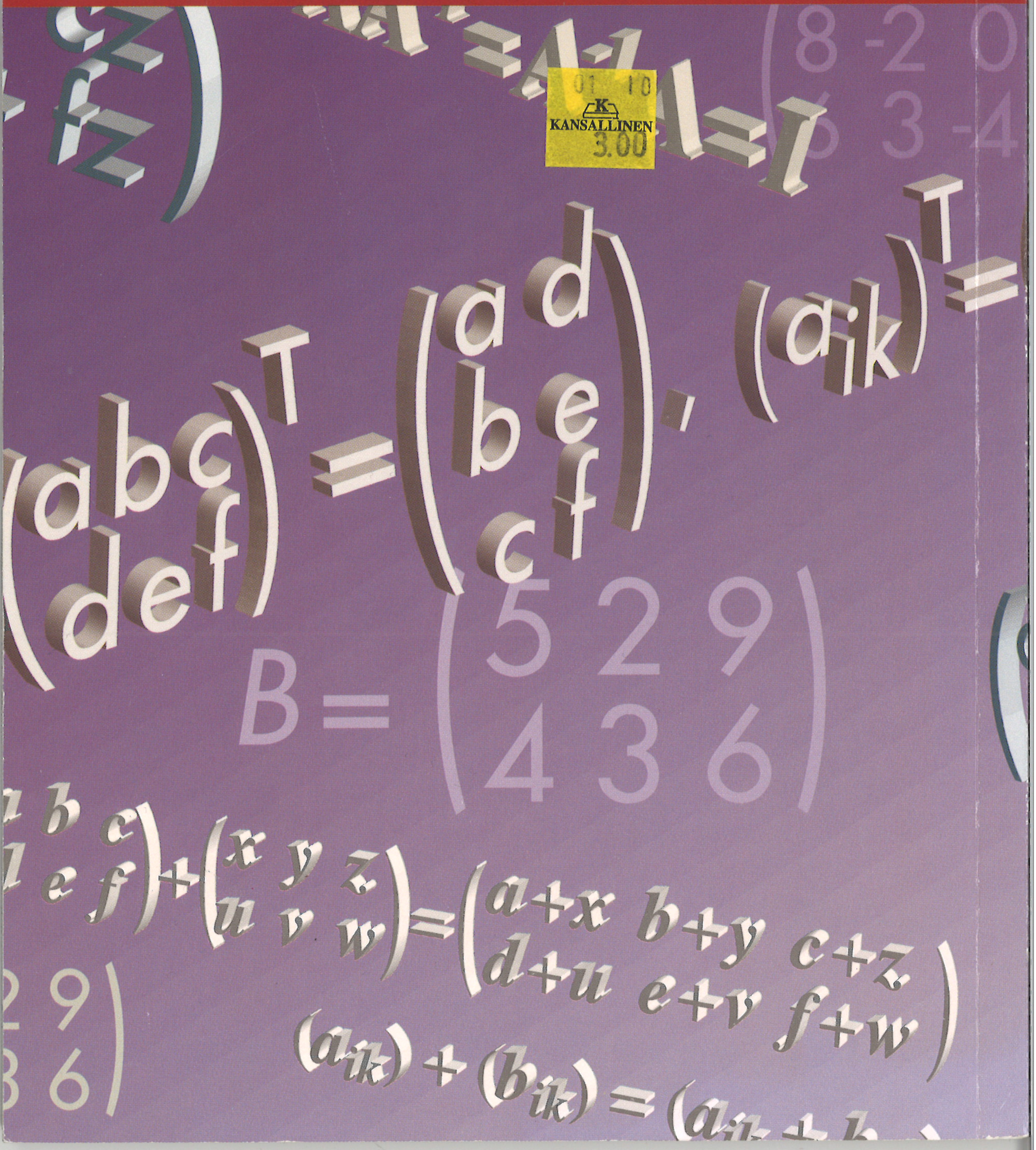
```
eigVl A
{(.50,2.18) (.50, -2....
```

Ominaisvektorit (eigVc), oikealle vieritetty näyttö

```
eigVc A
...,-.80) (-.59,0.00)]
...-.60)  (.59,0.00) ]
...,21)   (1.18,0.00)]]
█
```

Ominaisarvot saadaan esimerkkilaskimessamme MATRX-valikon toiminnolla eigVl. Näytössä (x, y) tarkoittaa kompleksilukua $x + iy$. Siis $\lambda_1 \approx 0{,}5 + 2{,}18i$ ja $\lambda_2 \approx 0{,}5 - 2{,}18i$. Ainoa reaalinen ominaisarvo $\lambda_3 = 7(= 7 + 0i)$ tulee esille vierittämällä näyttöä oikealle. Ominaisvektorit saadaan toiminnolla eigVc. Vierittämällä jälleen näyttöä oikealle saamme esille ominaisarvoa $\lambda_3 = 7$ vastaavan ominaisvektorin $X_3 = \begin{pmatrix} -0{,}59 \\ 0{,}59 \\ 1{,}18 \end{pmatrix}$. Jakamalla tämän 0,59:llä saamme siistimmän ominaisvektorin $X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Tuloksen voi vielä varmentaa kertolaskulla

$$AX_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix} = 7X_3.$$

K 51

9 789513 563394
ISBN 951-35-6339-1